凸している凹関数の困惑解消と実際応用

張　興和

1 はじめに

関数の凹凸性は高校数学の教科書に既に現れるが，大学数学でも更に深く検討される重要な概念である。凹凸関数は，例えば経済分野でも消費者の効用最大化や生産者の利潤最大化のように，最適化問題の目的関数として現在自然科学や社会科学の多くの分野で幅広く応用されている。凹凸関数こそ，数学の面白さを示すと共に実社会への数学の有用性を実感させるものの一つではないかと思われる。

しかし，従来の凹凸関数の教育は，あまりにも数学の厳密さを重視し，定義や定理の積み上げげに終始する傾向がある。その結果，たとえ定義や定理を暗唱できても，思い描くイメージとして関数の凹凸性とグラフとが上手く結び付かず，実用的なものにはならない。また，凹凸関数は一変数の場合のグラフの形が，象形文字である漢字から受け取れる意味とまさに反対であるので，学習者のみならず研究者の間にも困惑ないしは混乱を起こしているのが現状である。

そこで，このような事実を踏まえて，数学的厳密性を多少犠牲にするかもしれないが，直感的理解を重視する意味で，まず関数の凹凸性を検討したい。凹関数と凸関数の違いは単純にマイナス1を掛ければ互いに転換できるため，特に必要がある場合を除きここでの説明は凹関数に限定し，凹凸関数の学習者が持っている困惑を解消し，凹凸関数の有用性を実感しながら数学への関心を深めるのに少しでも役に立つことを目標に，一変数の凹凸関数とグラフの形状との関係，微分可能な関数の凹凸判別法，凹関数の性質の応用，筆者の凹関数の実践体験に絞って考察し，硬い凹凸関数を分かりやすく解説していきたい。

2 凸している凹関数による困惑

「凹（おう）」と「凸（とつ）」の二つの漢字は，他の多くの漢字よりわりあい遅く唐の時代になって初めて生まれたと言われており，日本では1981年に一般の社会生活において共通性の高い漢字として常用漢字（1945字）に追加された。象形文字として実に巧みに創られており，筆順が難しいかもしれないが，字の形を見るだけでも凹は「へこんでいる」であり凸は「出っ張っている」であるという意味は通じるのではないか。

凹凸（おうとつ）は引っ繰り返された形の凸凹（でこぼこ）と同義であるが，二つの漢字をそれぞれ単独に使う場合は互いに正反対の意味を持つ。しかし，普段あまり問題にならずに使われているが，数学用語では厄介な場合がある。数学用語の「関数の凹凸」と「関数の凸凹」とは意味が変わらないが，

「凹関数」と「凸関数」とは正反対なものであり，決して間違ってはいけない。

しかし，図1に示すような逆U字型曲線は，その形状から見れば明らかに「凸」の形になっているにもかかわらず，凹関数と呼ぶようにされている。なぜそのように逆さまに呼ぶのか？理由は調べられなかったが，この呼び方が招いたものは困惑ないしは混乱であることは確かである。

凹関数を凸関数とずっと間違えたままでいる人もいれば，そのうち気付いても本当に他人の呼び方が間違っているのかそれとも自身の理解があやふやなのか迷い始める人もいる。「凹関数と凸関数のグラフの形から言うと凹と凸が逆のような気がするが……？」とか「凹関数はそのグラフが凸の形で上に膨れているので凸関数ではないか？」というような質問の多くは後者からである。このように，折角長い時間をかけて凹関数を習ったとしても，理解が不完全な人は，積極的に応用する自信は持てないだろう。

このような混乱を避けるために，一部の本には逆U字型の凹関数を「凹関数（上に凸）」，「凹関数（下に凹）」，「上に凸な関数」などと呼んでいる[1)]。このように凹や凸の方向をイメージしやすく解説すれば，正確に伝えるのには役立つが，適切な数学用語であると言えないだろう。結局，誤解を招きやすいのを承知の上で，単に「凹関数」と呼ばれることが多い[2)]。

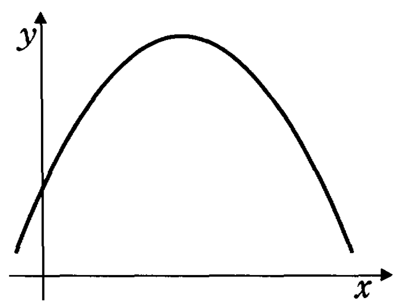

図1.　凹関数と呼ばれる逆U字曲線

このような凹関数という呼び方とそのグラフの形状との不一致がもたらした混乱は，学習者に止まらず，数学の教科書にも現れている。例えば講評も高く筆者も愛読している『経済学によく出てくる数学』という本の48ページに，「凸」と見えるような逆U字型のグラフには「凸関数」，「凹」と見えるようなU字型のグラフには「凹関数」というようにタイトルが明らかに誤って表示されている[3)]。これはたとえ誤植であっても，学習者は判別し難いところであろう。

誤解されやすい呼び方となってしまったのは残念なことであるが，凹関数を説明する時に，抽象的な定義の説明だけでなく，黒板にでも分かりやすい一変数のグラフ（曲線）を示しながら，「漢字の形と反対であるよ！」と明確に強調しておけば，凹関数を習い終わった後に凹関数のグラフが漢字の「凹」の形と実は逆さになっているのだと再度見直させるよりは，学習者に混乱や困惑を与えずに理解させ，ひいては凹関数の応用に役立つのではないかと考えている。

3 簡単な凹関数の判別法と不等式証明への応用

3.1 凹関数のグラフと定義

連続関数$f(x)$ が区間（a, b）で凹関数である（凹である）必要十分条件は，区間（a, b）に属する任意の 2 点x_1, x_2 に対して常に

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \qquad \text{（式 1）}$$

を満たすことである。

凹関数のグラフとその定義は図 2 に示すが，簡単に言えば，凹関数は，関数のグラフからどんな 2 点を選んで線分を作っても，関数のグラフよりも下方に来る関数である。

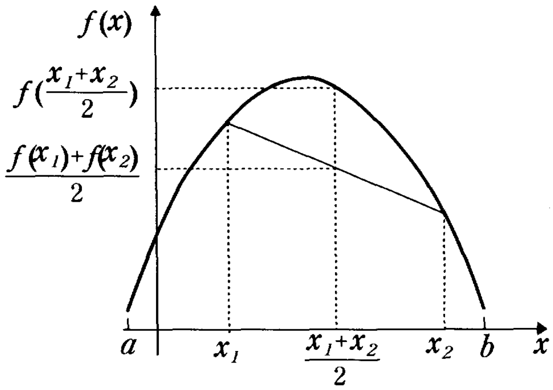

図 2.　凹関数のグラフとその定義

3.2 微分可能な関数の凹凸判別

式 1 で示す不等式を満足すれば関数は凹関数であるが，この条件を利用して凹関数であるかどうかを判定するには極めて難しい。これは区間（a, b）に属する任意の 2 点に及んでいるからである。

しかし，関数が微分可能であれば，関数の導関数で関数の凹凸を判別することができる。微分可能という条件が厳しいと思われがちであるが，実際，ほとんどの関数は微分可能なものである。従って，関数の導関数による関数の凹凸判別は簡便かつ有用な方法である。

関数の 2 階導関数の符号が非正であればその関数が凹関数であり，負であればその関数が厳密な凹関数である。ここでは省略するが，これはラグランジュの平均値の定理より簡単に証明できるものである。

ここでは一般論を避け，簡単な 3 次関数を例に，関数とその 1 階導関数及び 2 階導関数の関係，2 階導関数を用いた関数の凹凸性の判別法を示したい。例とする関数 $f(x)=x^3-3x$, その 1 階導関数

$f'(x)=3x^2-3$，その2階導関数$f''(x)=6x$は，併せて図3に示している。

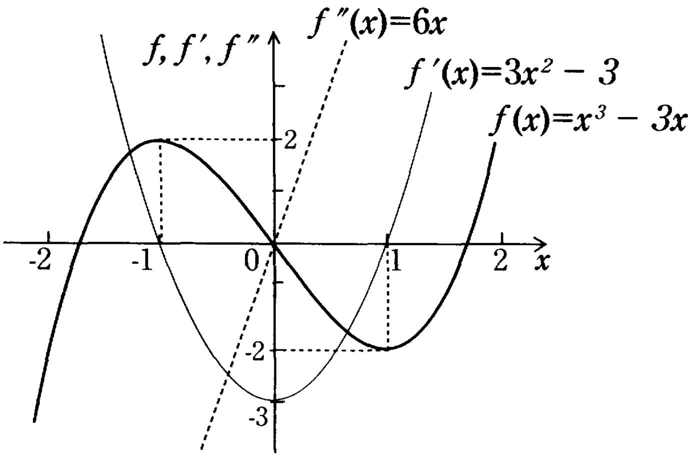

図3.　微分可能な関数とその1階導関数及び2階導関数

同図に基づいてまとめた1階導関数と2階導関数の符号及び関数の増減凹凸特性を表1に示す。同表からわかるように，関数の1階導関数の符号の正・負は関数の増加・減少に，2階導関数の符号の負・正は関数の凹・凸に対応している。

表1　1階導関数及び2階導関数の符号と関数の増減・凹凸

x	$-\infty$		-1		0		1		∞
$f'(x)$		+	0	−		−	0	+	
$f''(x)$		−	−	−	0	+	+	+	
$f(x)$	$-\infty$	増加	極大値	減少	0	減少	極小値	増加	∞
		凹			変曲点	凸			

関数の1階導関数は関数の変化率（関数の増加と変数の増加との比），つまり関数のグラフの傾きを示すものである。

1階導関数の符号が正であればxの増加につれて関数のグラフは増加し右上がりとなり，負であれば関数のグラフは減少し右下がりとなる。1階導関数が0である場合，2階導関数の符号が負であればその関数が極大値，正であれば極小値を取る。

関数の2階導関数は，1階導関数の変化率，つまり関数のグラフの傾きの変化率を示すものである。2階導関数が正であれば，xの増加につれてグラフの傾きが増加し，負であればグラフの傾きが減少する。

2階導関数が負である場合，1階導関数が正であればグラフが緩やかになり，1階導関数が負であればグラフが急になる。これは同図の区間（$x<0$）に対応し，凹関数であることを意味する。

同様に2階導関数が正である場合，1階導関数が負であればグラフが緩やかになり，1階導関数が正であればグラフが急になる。これは同図の区間（$x > 0$）に対応し，凸関数であることを意味する。

2階導関数が0である場合は，もしその前後の2階導関数の符号が反対であれば，変曲点であり，その点でグラフの凹凸が切り替わることになる。

以上に示したように，2階導関数の符号によって関数の凹凸性を判断することは確かに便利である。しかし，いくら便利なツールと言っても一部の初心者はなかなか覚えられないことがある。速く覚えさせるコツがないのかについて調べた結果，『入門・経済数学』という本に，2階導関数の符号と関数（曲線）の凹凸との関係を示す面白い顔の絵があった[4)]。きっと初心者の記憶に役立つだろうと感心しながら，多少改変したものを図4に示す。

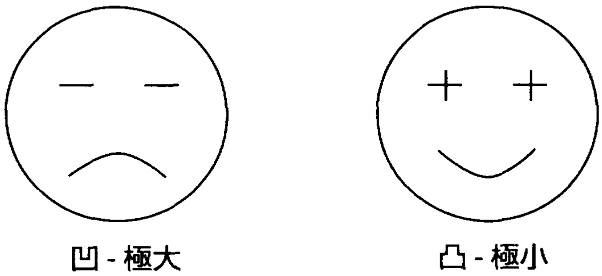

図4.　　2階導関数の負・正と関数の凹・凸

3.3 凹関数の不等式の性質の応用

凹関数の不等式の性質の応用が極めて多いが，ここでは，一例として算術平均が幾何平均より大きいことの証明に応用し，凹関数の性質の素晴しさと有用性を示す。

図5は自然対数関数 $f(x)=\ln x$，その1階導関数 $f'(x)=1/x$，その2階導関数 $f''(x)=-1/x^2$ を示している。1階導関数は常に正であるから自然対数関数は単調増加関数であり，また，2階導関数は常に負であるから自然対数関数は凹関数であることが判定できる。

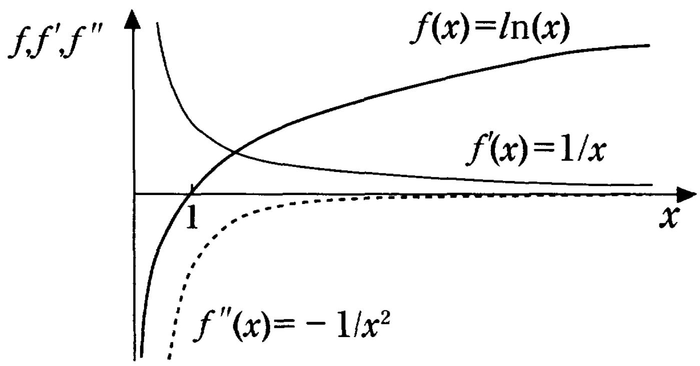

図5.　　自然対数関数の凹性と単調増加性

経済統計学において経済成長率や貯蓄の増加率などの時系列データの代表値を求める際に使われ

る幾何平均が算術平均より小さいことは，この自然対数関数の凹性と単調増加性を利用すれば，簡単に証明出来る。以下は証明過程を簡単に示す。

任意の正である2点x_1，x_2に対して，自然対数関数の凹性より，

$$ln(\frac{x_1+x_2}{2}) \geq \frac{ln(x_1)+ln(x_2)}{2} \qquad (式2)$$

が得られるが，これを書き直すと，

$$ln(\frac{x_1+x_2}{2}) \geq ln(\sqrt{x_1 x_2}) \qquad (式3)$$

となる。また，自然対数関数の単調増加性より，

$$\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} \qquad (式4)$$

が得られる。

これは「幾何平均＜算術平均」の不等式そのものである。また，式中の等号が$x_1 = x_2$に限ることも同図より明らかである。

4 複雑な凹関数の数値解析と実際への応用

凹関数は不等式の証明に便利で有用なツールであることを以上に示したが，それ以外に自然科学や社会科学への応用も多く，実に有用性の高いものである。異なる分野の読者にとっては読み難いところがあるかもしれないが，ここでは工業プロセスの効率最適化への凹関数の応用の一例を示す。

廃棄自動車や廃棄家電製品のように鉄は利用されればスクラップとなるが，鉄スクラップは溶解再生して新しい鉄製品になるように何度も繰り返すことが可能である。毎年多量に発生する鉄スクラップは天然資源の少ない日本にとってとても貴重な資源である。一方，鉄の融点が炭素含有量の増加に伴い降下する現象があるため，鉄スクラップに浸炭させその炭素含有量を高めることは，省エネルギーの観点から極めて重要である。熱力学と動力学の理論的分析と実験的研究により，反応ガス中のCO_2が無視できる場合には次のような固体鉄への浸炭速度式が得られている。

反応速度定数　$$k_2 = 1.61 \times 10^{-8} \exp\left[\frac{-42.1 \times 10^3}{RT}\right] \qquad (式5)$$

反応平衡定数 $K_1 = 5.34 \times 10^{-13} \exp\left[\dfrac{168.8 \times 10^3}{RT}\right]$ （式6）

浸炭反応速度 $V_C = k_2 \dfrac{K_1 p^2_{co}}{(K_1 p_{co} + a_c)}$ （式7）

浸炭反応速度は反応速度定数 k_2, 反応平衡定数 K_1 及び CO ガス圧力 pco と鉄表面における炭素活量 a_c の関数となっているが, k_2 と K_1 は共に反応温度 T の関数である。CO ガス圧力 pco と鉄表面における炭素活量 a_c を定数と仮定した場合は, 浸炭反応速度は反応温度のみの一変数関数となるが, 指数関数の複合関数である。

微分演算を通じて関数の凹凸性を判別し, 極大点・極小点を求めることができることは確かに素晴しい。しかし, この浸炭反応速度という関数は, 教科書レベルより複雑であり, 微分演算が可能ではあるが, それを微分して浸炭反応速度が極大値となる温度の解析解を求めることは決して容易ではない。

しかし, 鉛筆と紙のみの数学の時代が既に過ぎ, コンピューターのハードウエアとソフトウエアが共に発達している今日では, 無理に解析解を求める必要がなくなっている。解析解を求めにくい場合は, 思い切ってコンピューターを利用して数値解を求めれば良い。実際, このような複雑な関数であっても, 数値解析では迅速に数値解を求めることができる。

数値解析により得られた浸炭反応速度と反応温度との関係は図6に示される[5)]。温度の上昇につれて反応速度定数 k_2 増加するが, 反応平衡定数 K_1 が逆に減少する。両者の関数である浸炭反応速度は凹関数となり, 温度の上昇につれて浸炭反応速度が増加するが, ある温度（極大点, a_c=0.5 の場合は 1185K）で浸炭反応速度が極大値となり, その以上の高温領域では温度の上昇につれて浸炭反応速度がかえって減少していくことが示されている。

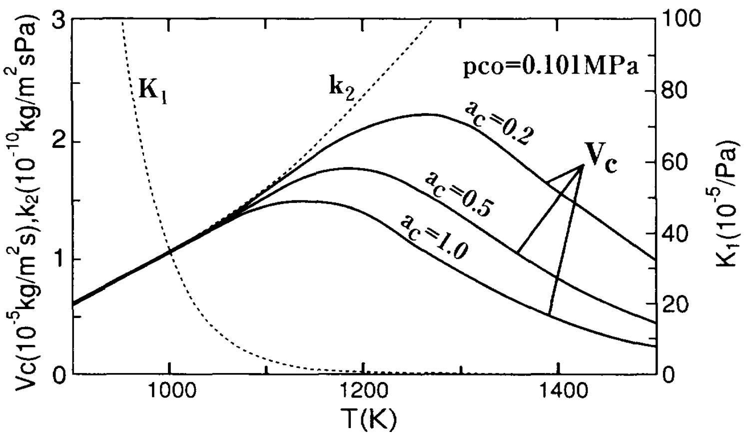

図6. 浸炭反応速度及び反応速度定数と反応平衡定数の反応温度依存性

溶解炉に装入された鉄スクラップは炉内を降下している間に加熱されると同時にガスとの浸炭反応が起こるため，浸炭反応速度は鉄スクラップの移動速度，温度及びガス組成などに影響される。この複雑な現象を解明するためには数学的モデルによる数値解析が有効である。式8は筆者らが構築した円筒縦型鉄スクラップ溶解炉（直径1m，高さ4.9m）の2次元数学的モデルを示す。式中，iは溶解炉中の気体，個体及び液体の三相を表し，ϕは鉄スクラップの炉内の降下速度，温度，表面炭素濃度，ガス組成やガス温度などの変数を表す。

$$\frac{\partial(\varepsilon_i\rho_i u_i\phi_i)}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\varepsilon_i\rho_i v_i\phi_i)}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon_i\Gamma_{\phi_i}\frac{\partial\phi_i}{\partial x})+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varepsilon_i\Gamma_{\phi_i}\frac{\partial\phi_i}{\partial r})+S_{\phi_i} \quad \text{（式8）}$$

浸炭反応速度式をこの数学的モデルに適用した解析結果（図7）により，炉の高さ3.5 m付近で鉄スクラップ表面炭素濃度が最も高い領域が存在することが確認されている[6]。鉄スクラップの融点を下げるためにその炭素濃度を向上させるには，この高速浸炭領域を生かすことが重要であることが明らかになった。

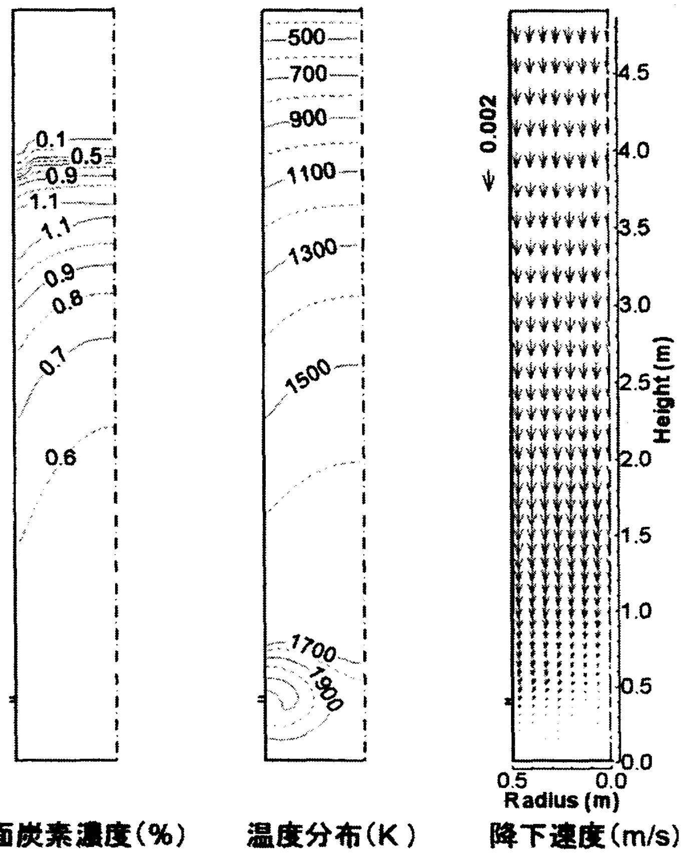

図7.　　円筒縦型鉄スクラップ溶解炉の縦断面左側半分の解析結果

5 おわりに

関数の凹凸性の教育に存在する問題点を整理し，関数とグラフとが結び付く直感性を強化する教え方を提案している。一変数微分可能な関数の凹凸性や単調性の判別法とその性質の応用を典型的な関数を例に出来るだけ分かりやすく説明した。また，異なる分野の読者にとって分かり難いところがあるかもしれないが，凹関数の実際への応用と数値解析法を紹介した。

本論は中国の諺にある抛磚引玉（煉瓦を投げて宝玉を引き寄せること）が出来るつもりで書いたものであり，その意味では関数の凹凸性の研究者や実践者からの指摘を期待している。

なお，本論の作成にあたっては，本学経済学部准教授吉地望博士より有益な助言を頂いた。ここに謝辞を申し上げたい。勿論，論文に含まれる誤りはすべて筆者の責任に帰する。

参考文献

1) 例えば，石村園子，『微分積分入門』，共立出版（東京都），2004 年。
2) 例えば，西村和雄，『経済数学早分かり』，日本評論社（東京都），2002 年。
3) 岡村宗二，加藤正昭，『経済学によく出てくる数学』，同文館出版（東京都），2006 年。
4) E. ドウリング著，大住栄治，川島康男訳，『入門・経済数学（上）』，マグロウヒル出版（東京都），1990 年。
5) 張興和，高橋礼二郎，秋山友宏，八木順一郎，「CO － CO2 雰囲気における固体鉄への浸炭速度」，『鉄と鋼』，Vol.83(1997), No.5, pp.299-304。
6) Xinghe ZHANG, Reijiro TAKAHASHI, Hiroshi NOGAMI and Jun-ichiro YAGI,「Numerical Simulation of Moving Bed Furnace for Iron Scrap Melting」,『ISIJ International』, Vol.42 (2002), Supplement, pp.S23-27。

要旨

凸している凹関数の困惑解消と実際応用

張　興和

関数の凹凸性は数学の重要な概念であり，現在最適化問題の目的関数として自然科学や社会科学の多くの分野で幅広く応用されている。

本論文では関数の凹凸性の教育に存在する問題点を整理し，関数とグラフとが結び付く直感性強化型教授法を提案している。一変数微分可能な関数の凹凸性と単調性の判別法とその性質の応用を典型的な関数を例に出来るだけ分かりやすく説明し，凹関数の実際への応用と数値解析法を紹介した。

凹凸関数の学習者が持っている困惑を解消し，凹凸関数の有用性を実感しながら数学への関心を深めるのに少しでも役に立つことを期待している。

Abstract

Quandary resolution about the concave function and its application

Xinghe Zhang

Concave and convex are important concepts in the mathematics. They are widely applied in optimization process both by natural science and social science.

In this article, how to make it easier to understand concave and convex of a function for students is discussed. An intuitive teaching way, to connect the function with its graph, was proposed. Using simply but typical functions as examples, how to discriminate and use a function' s concave (or convex) and its monotonicity are explained as easy as we can. At same time, the method of numerical analyses with complex function which is applied in research is discussed and the usefulness of concave function is also introduced.

I hope this paper is useful to enlighten understanding difficulties about concave and convex to students, therefore they can find useful of concave (and convex) function and deepen their interest in mathematics.