

# 情報量統計学の方法を用いた 携帯情報端末における実験データの分散分析

姜 興 起 任 向 実

## 1. はじめに

統計分析の中でよく起こる問題の一つは、2組のデータがある属性に関して有意に異なっているか否かを検定する問題である。このような問題がよく起こるのは、研究者が新しい手法などを標準的なものと比較できるように実験計画を行うことが多いためである。また、互いに比較する方法などが2種類にとどまらずもっと多い場合もあれば、その上注目する属性も一つだけでなくもっと多い場合もある。

このような問題に分散分析 (ANOVA) という統計分析の方法がよく適用される。しかし、従来の分散分析では、分析の結果が仮説検定を通して提示される。本稿では、分散分析の問題を線形回帰モデル化し、その上情報量規準によるモデル選択を通して分析の結果を提示する、という情報量統計学の方法による分散分析法について考察する。そしてこの方法を携帯情報端末上の実験データ解析に適用する。

## 2. 情報量統計学に関するレビュー

まず、経済、経営および工学諸分野の研究者並びに学生を対象に、統計モデル、最尤法と情報量基準 AIC などの情報量統計学の基本概念についてレビューを行う。

### 2.1 統計モデル

統計学では、偶然な変動を伴う変数を確率変数という。確率変数  $X$  について、ある実数  $x$  に対して  $X \leq x$  となる確率  $\text{Prob}(X \leq x)$  が定められる。 $F(x) = \text{Prob}(X \leq x)$  は  $x$  の関数であり、確率変数  $X$  の分布関数と呼ばれる。 $X$  が連続型確率変数の場合、その分布関数は

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

のようにある非負の関数  $f(x)$  の積分で表現できるとき,  $f(x)$  を  $X$  の密度関数と呼ぶ。実際の統計解析において確率分布は分布関数より直接に密度関数で提示される場合が多い。

シミュレーションのような場合, 具体的な確率変数についてその分布を想定し, 乱数でデータを生成することができるが, 統計解析ではわれわれが実際に得たデータのある確率変数の実現値として取り扱うのである。このとき, 確率変数を特徴づける密度関数を真の分布と呼ぶ。通常, 真の分布が未知のために与えられたデータに基づいてそれを推定する必要がある。つまり, データが与えられたとき, 逆にその密度関数を推定することになる。データから推定した密度関数を統計モデルと呼ぶ。一般に統計モデルはある種の関数で設定され, 柔軟性のために確率変数のほかにいくつかの変数 (例えば正規分布の場合, 平均や分散など) もそれに組み込まれる。これらの変数は統計モデルを特徴づけるものであり, パラメータと呼ばれる。

統計モデルは未知パラメータを含む密度関数で設定される場合が多い。具体的な問題について統計モデルを考案するとき, モデル選択が実現可能なようにモデル構築の範囲を限定し, モデルの設定, 推定および選択が決められた範囲のなかで実現される。一般に, 統計モデルの設定をパラメータの組み込み方に帰着し, モデルの推定をパラメータの推定に帰着することができる。

## 2.2 最尤法

確率変数  $X$  を観測した  $N$  個のデータ  $x_1, x_2, \dots, x_N$  が互いに独立で同一の統計モデル  $f(x_i|\theta)$  をもつものとする。ただし,  $\theta$  は統計モデルを特徴づけるパラメータ (一般的に  $\theta$  はベクトル) である。仮定により  $x_1, x_2, \dots, x_N$  の同時分布は

$$f(x_1, x_2, \dots, x_N|\theta) = \prod_{i=1}^N f(x_i|\theta) \quad (1)$$

で与えられる。一定の  $\theta$  の値について, (1) 式は標本点  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  の周囲のある微小範囲における確率を規定するものである。逆に  $x_1, x_2, \dots, x_N$  が観測データとして所与のとき, (1) 式の  $f(x_1, x_2, \dots, x_N|\theta)$  は  $\theta$  の関数となる。これは尤度関数 (略して尤度) と呼ばれ,

$$L(\theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_N|\theta) = \prod_{i=1}^N f(x_i|\theta) \quad (2)$$

で表記される。

データに基づいて未知パラメータ  $\theta$  を推定する際に, 最尤法と呼ばれる方法がよく使用される。最尤法は文字通り尤度  $L(\theta)$  の最大化によってパラメータ値を推定する方法である。最尤法で得られたパラメータの推定値を最尤推定値と呼び,  $\hat{\theta}$  と記述する。最尤推定値の意味は次の通りである。 $\hat{\theta}$  の値を (2) 式に代入すれば,

$$L(\hat{\theta}) = f(x_1, x_2, \dots, x_N | \hat{\theta}) = \max\{f(x_1, x_2, \dots, x_N | \theta)\}$$

となる。すなわち、最尤法のねらいは統計モデルのデータへの当てはまりを最大限に追求することである。因みに、尤度の自然対数は対数尤度と呼ばれる量で

$$\ell(\theta) = \ln\{L(\theta)\}$$

と表記される。対数関数の単調増加の性質から最尤推定は尤度の代わりに対数尤度の最大化で実現できることがわかる。また、尤度より対数尤度の方はすぐれた解析的操作性を持つため、対数尤度の最大化を通して最尤法を実行するが多い。

いま最尤法の例として、 $f(x_i | \theta)$ が平均 $\mu$ 、分散 $\sigma^2$ の正規分布の場合について考える。ここで、 $\mu$ と $\sigma^2$ をパラメータとして扱えば、 $x_i$ の統計モデルは

$$f(x_i | \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \mu)^2\right\}$$

となる。そこで全部のデータについて尤度は

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^N f(x_i | \mu, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^N \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2\right\}$$

で定義されるので、対数尤度は

$$\ell(\mu, \sigma^2) = -\frac{N}{2} \ln\{2\pi\sigma^2\} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 \quad (3)$$

となる。

前述のように対数尤度 $\ell(\mu, \sigma^2)$ の最大化により、パラメータ $\mu$ と $\sigma^2$ の最尤推定値 $\hat{\mu}$ と $\hat{\sigma}^2$ が求められる。任意に定められた $\mu$ に対して対数尤度 $\ell(\mu, \sigma^2)$ を最大とする分散 $\sigma^2$ を求めるために

$$\frac{\partial \ell(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 = 0$$

を解くと、 $\sigma^2$ の条件付き推定値は

$$\hat{\sigma}^2(\mu) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 \quad (4)$$

のように求められる。しかし、この $\hat{\sigma}^2(\mu)$ が未知平均 $\mu$ に依存するので、問題はまだ未解決である。

そのために(3)式における $\sigma^2$ に(4)式の $\hat{\sigma}^2(\mu)$ を代入すると対数尤度は平均 $\mu$ だけの関数となり

$$\ell(\mu, \hat{\sigma}^2(\mu)) = -\frac{N}{2} \ln\{2\pi\hat{\sigma}^2(\mu)\} - \frac{N}{2} \quad (5)$$

で与えられる。ここで、対数関数の単調増加の性質を考慮すると、対数尤度(5)を最大とする平均 $\mu$ を求めるには、(4)式の $\hat{\sigma}^2(\mu)$ を最小とすればよいことがわかる。したがって、 $\mu$ の最尤推定値はデータの平均値

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (6)$$

で得られるから、結局分散 $\sigma^2$ の最尤推定値は

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{\mu})^2 \quad (7)$$

で与えられる。さらに、最大対数尤度は

$$\ell(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2) = -\frac{N}{2} \ln\{2\pi\hat{\sigma}^2\} - \frac{N}{2} \quad (8)$$

で計算される。

### 2.3 情報量規準 AIC

統計モデルが人工物であるため、モデル構築主体の分析対象に対する主観的な判断は避けられないし、同一分析対象を表現するのに多種の統計モデルが提案される状況も考えられる。したがって、統計モデルの「よさ」を客観的に評価するための基準が必要となる。

そのために、統計モデルと真の分布との相違 (divergence) を測るカルバック・ライブラー情報量 (Kullback-Leibler information number, KL 情報量) が適用される。確率変数  $X$  について、 $g(x)$  で真の分布を、 $f(x|\theta)$  で  $\theta$  をパラメータとする統計モデルを表すと、真の分布に対する統計モデルの KL 情報量は

$$I(g; f|\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left\{ \frac{g(x)}{f(x|\theta)} \right\} g(x) dx \quad (9)$$

で定義される。この KL 情報量は、非負ですべての確率変数値について統計モデルが真の分布に一致する場合に限りゼロとなるという性質を持っている。したがって、統計モデルは KL 情報量が小さいほど真の分布に近いと考えることができる。

ところが、統計解析法が適用される状況では、真の分布が未知のため KL 情報量は直接に計算できない。ほとんどの場合、真の分布の代わりに観測データを持つのが現実的である。いま、(9)式より

$$I(g; f|\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \ln\{g(x)\}g(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} \ln\{f(x|\theta)\}g(x)dx \quad (10)$$

という関係が得られる。(10)式では右辺の第1項は真の分布が与えられない限り計算できないが、統計モデルには依存しない一定値をとるのでモデル評価のときそれを無視することができる。したがって、右辺の第2項、平均対数尤度と呼ばれる量を最大とする統計モデルがよいことになる。

(10)式において、右辺第2項の平均対数尤度も未知の真の分布に依存するものであるが、ここで、 $X$ の観測データに基づいて平均対数尤度を推定する方法を考える。データ $x_1, x_2, \dots, x_N$ が真の分布 $g(x)$ に従って生成されるものと想定できるから、大数の法則によりサンプルサイズ $N$ が十分に大きいとき、

$$\frac{1}{N} \ell(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln\{f(x_i|\theta)\} \approx \int_{-\infty}^{\infty} \ln\{f(x|\theta)\}g(x)dx \quad (11)$$

という関係がある。(11)式において

$$\ell(\theta) = \sum_{i=1}^N \ln\{f(x_i|\theta)\} \quad (12)$$

という量は対数尤度であるから、それを最大とするような統計モデルを選べば、近似的に本来の評価基準であるKL情報量 $I(g; f|\theta)$ を最小にすることができる。

しかし、問題はまだ残っている。対数尤度 $\ell(\theta)$ は未知パラメータ $\theta$ の関数であるから、それを評価するのにパラメータにその推定値を以って代入する必要がある。そのためにパラメータの最尤推定値 $\hat{\theta}$ の使用で最大対数尤度 $\ell(\hat{\theta})$ を得る。このように複数のモデル候補がある場合には、最大対数尤度でこれらモデルのよさを比較することができれば問題は解決される。しかしながら、実際には最大対数尤度は直接に異なる統計モデル間の比較には利用できない。その原因は最尤推定値で規定

される統計モデルについては $\frac{1}{N} \ell(\hat{\theta})$ が平均対数尤度 $\int_{-\infty}^{\infty} \ln\{f(x|\theta)\}g(x)dx$ の推定量として正の偏りを持つことである。この偏りは近似的に最尤法で推定されるパラメータ数( $m$ とする)に比例し、それを修正した量は赤池情報量規準 (Akaike Information Criterion, AIC) であり、

$$\text{AIC} = -2\ell(\hat{\theta}) + 2m \quad (13)$$

と定義される。このAICは、その符号を逆転した量 $-AIC$ が比例係数を無視すれば平均対数尤度の不偏推定値となるから、統計モデルの評価基準として利用できる。したがって、複数の統計モデルが並存する場合、最小AICを導くものがよいモデルと判断される。このように統計モデルを選択する方法は最小AIC法と呼ばれる。AICの導出についてAkaike (1974) および北川 (1993) などが詳しい。坂元・石黒・北川 (1983) では最小AIC法の応用例が多く紹介されている。

従来、理論の検証は統計的仮説検定を通して実現される。最小 AIC 法に比べて仮説検定によるアプローチは、信頼水準の決定などがかなり主観的であり、手続きの煩雑さにより複雑な理論構造を検証するのに適用しにくい面がある。赤池 (1976) は最小 AIC 法と仮説検定によるアプローチとの比較について哲学および実際の両面にわたって論じている。

### 3. 分散分析モデル

分散分析モデルは連続型確率変数の変動をカテゴリカルな変量に関係付けて説明する統計モデルの一種である。ここで、仮説検定による分散分析法についてのレビューを行い、最小 AIC 法による分散分析法を紹介する。そしてシミュレーションでこの2種類アプローチのパフォーマンスを比較する。

#### 3.1 仮説検定による分散分析

いま、確率変数  $X$  がある要因  $C$  の影響を受けていると想定し、ある実験を行ったとき、要因  $C$  の  $k$  個の水準において、それぞれ  $n_1, n_2, \dots, n_k$  個のデータがあるとする。第  $i$  水準におけるデータを  $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i}$  で表すと、その  $j$  番目のデータ  $x_{ij}$  の変動は

$$x_{ij} = \mu_i + e_{ij} \quad (14)$$

で表現されると考える。ただし、 $\mu_i$  は第  $i$  水準における平均、 $e_{ij}$  は誤差である。一般の分散分析では、誤差  $e_{ij}$  は互いに独立な平均 0、分散  $\sigma^2$  の正規分布に従うと仮定される。ここで、各平均  $\mu_i$  の平均を

$$\mu = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mu_i \quad (15)$$

と定義する。解析のねらいは各平均  $\mu_i$  の間に差があるかを検証することであるが、その代わりにそれらの相対的な差

$$\alpha_i = \mu_i - \mu \quad (16)$$

について考えてもよいことである。ここで、 $\mu$  を全平均、 $\alpha_i$  を第  $i$  水準の効果と呼ぶ。

問題をこのように設定すると (14) 式のモデルは

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij} \quad (17)$$

となる。(15)と(16)式から自然に

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0 \quad (18)$$

のように各効果間の関係が得られる。一次元配置分散分析において(17)と(18)式は最も基本的なモデル表現であり、これらを一次元配置分散分析の基本モデルと呼ぶ。

観測データについて(17)式のような構造を想定したとき、各水準の効果 $\alpha_i$ に差がないという仮説、すなわち $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ を検定することになる。統計解析では、 $H_0$ のような仮説を元の仮説という。これに対し、「各効果の中で少なくとも二つ異なるものがある」という仮説を対立仮説という。明らかに、元の仮説が一つしかないのに対し対立仮説は複数も提示できる。

いま、第 $i$ 水準での標本平均 $\bar{x}_i$ 、全部データの標本平均 $\bar{x}$ はそれぞれ

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$$

のように計算される。ただし、 $N = \sum_{i=1}^k n_i$ は全体標本の大きさである。もし、仮説 $H_0$ が真ならば

$x_{ij} = \mu + e_{ij}$ となるので、誤差分散 $\sigma^2$ は

$$\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x})^2$$

でその不偏推定が得られる。また、

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 + \sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$$

のように、データの全変動(左辺)は誤差変動(右辺第1項)と要因 $C$ による変動(右辺第2項)に分解できる。この誤差変動で定義した統計量

$$S_E^2 = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$$

は仮説 $H_0$ の真偽に関係なく $\sigma^2$ の不偏推定となる。一方、要因 $C$ による変動で定義した統計量

$$S_C^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$$

は、仮説 $H_0$ が真の場合に限り $\sigma^2$ の不偏推定となり、 $H_0$ が偽の場合、それは真の $\sigma^2$ より大きくなる可能性が高い。すなわち、 $S_C^2$ と $S_E^2$ の比で定義した統計量

$$F^* = \frac{S_C^2}{S_E^2} \quad (19)$$

を考えると、 $F^*$ の値は、仮説 $H_0$ が真のとき1に近く、 $H_0$ が偽のとき1より大きくなる可能性が高い。したがって、統計量 $F^*$ は仮説 $H_0$ の真偽を検証するのに適用される。

いま、 $S_E^2$ と $S_C^2$ で定義される量 $(N-k)S_E^2/\sigma^2$ と $(k-1)S_C^2/\sigma^2$ はそれぞれ自由度 $N-k$ のカイ二乗分布と自由度 $k-1$ のカイ二乗分布に従う。また、これらは互いに独立なので、仮説 $H_0$ が真の場合には(19)式の統計量 $F^*$ は自由度 $N-k$ と $k-1$ の $F$ 分布に従うことになる。

ここで、ある有意水準 $\alpha$ について仮説 $H_0$ を検定することを考える。自由度 $m_1 = k-1$ と $m_2 = N-k$ の $F$ 分布に従う確率変数 $F$ について $\text{Prob}(F > f_\alpha(m_1, m_2)) = \alpha$ となる $100\alpha\%$ 点の値 $f_\alpha(m_1, m_2)$ を求め

$$F^* > f_\alpha(m_1, m_2) \quad (20)$$

ならば、 $H_0$ を棄却する。

### 3.2 最小AIC法による分散分析

前述の仮説検定によるアプローチにいくつかの問題がある。まず、検定の結果が有意水準 $\alpha$ に依存するが、 $\alpha$ の決定は参照できる規準がなく研究者の主観的判断に頼らざるを得ない。また、元の仮説が $H_0$ 棄却されると、各効果間に差があるという対立仮説を消極的に受け入れることとなるが、異なる対立仮説間の比較はできない。これに対し、最小AIC法では、(17)と(18)式の基本モデルを基に仮説 $H_0$ および各対立仮説をそれぞれ異なる線形回帰モデルで表現し、そして各仮説の検証はモデル選択を通して実現できる。

いま、(17)と(18)式の基本モデルに仮説 $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ を導入すると、

$$x_{ij} = \mu + e_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, n_i) \quad (21)$$

となる。これは結局 $x_{ij}$ が独立な平均 $\mu$ 、分散 $\sigma^2$ の正規分布という仮定に帰着される。2.2節のようにこの場合、平均 $\mu$ 、分散 $\sigma^2$ はそれぞれ

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \quad (22)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \hat{\mu})^2 \quad (23)$$

によって推定される。さらに、最大対数尤度は(8)式で計算され、(13)式により対応するAICは



$$AIC = -2\ell(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2) + 2m \quad (24)$$

で計算される。ただし、パラメータ数  $m$  は 2 である。

一方、一般に対立仮説に対応するモデルは複数もある。ここで、すべての効果  $\alpha_i$  が異なるモデル

を例に考える。(18)式から  $\alpha_k = -\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i$  の関係が得られるので、結局(17)式の分散分析モデルは

$$\begin{aligned} x_{1j} &= \mu + \alpha_1 + e_{1j} \quad (j = 1, 2, \dots, n_1) \\ x_{2j} &= \mu + \alpha_2 + e_{2j} \quad (j = 1, 2, \dots, n_2) \\ &\vdots \\ x_{kj} &= \mu - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i + e_{kj} \quad (j = 1, 2, \dots, n_k) \end{aligned} \quad (25)$$

のような線形回帰モデルで表される。また、

$$\begin{aligned} x &= (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}, \dots, x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn_k})^t \\ e &= (e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1n_1}, e_{21}, e_{22}, \dots, e_{2n_2}, \dots, e_{k1}, e_{k2}, \dots, e_{kn_k})^t \\ a &= (\mu, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1})^t \\ Z &= \begin{bmatrix} 1 \dots 1 & 1 \dots 1 & \dots & 1 \dots 1 & 1 \dots 1 \\ 1 \dots 1 & 0 \dots 0 & \dots & 0 \dots 0 & -1 \dots -1 \\ 0 \dots 0 & 1 \dots 1 & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \dots 0 & \vdots \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & \dots & 1 \dots 1 & -1 \dots -1 \end{bmatrix}^t \end{aligned}$$

と置けば、(25)式のモデルは

$$x = Za + e \quad (26)$$

のように行列・ベクトルの表現で表記できる。ここで、 $x$  は目的変数ベクトル、 $Z$  は  $N \times k$  の説明変数行列（またはデザイン行列）、 $a$  は回帰係数ベクトル、 $e$  は残差ベクトルである。

(26) 式の回帰モデルは回帰係数  $a$  と残差分散  $\sigma^2$  をパラメータとして持っているので全部のパラメータ数は  $k+1$  となる。目的変数ベクトル  $x$  が与えられたとき、各残差が互いに独立な正規分布との仮定からこのモデルの対数尤度は

$$\ell(a, \sigma^2) = -\frac{N}{2} \ln\{2\pi\sigma^2\} - \frac{1}{2\sigma^2} \|x - Za\|^2 \quad (27)$$

によって与えられる。ただし、 $\|x - Za\|^2 = (x - Za)^t (x - Za)$  で定義される。

最尤法によりパラメータの最尤推定値  $\hat{a} = (\hat{\mu}, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_{k-1})'$  と  $\hat{\sigma}^2$  が求められる。任意の回帰係数  $a$  に対して対数尤度  $\ell(a, \sigma^2)$  を最大とする分散  $\sigma^2$  を求めると、

$$\hat{\sigma}^2(a) = \frac{1}{N} \|x - Za\|^2 \quad (28)$$

となる。回帰係数  $a$  を推定するために  $\hat{\sigma}^2(a)$  を (27) 式に代入すると対数尤度は回帰係数  $a$  だけの関数となり

$$\ell(a, \hat{\sigma}^2(a)) = -\frac{N}{2} \ln\{2\pi\hat{\sigma}^2(a)\} - \frac{N}{2} \quad (29)$$

で与えられる。結果として回帰係数  $a$  の最尤推定値は (29) 式の最大化で

$$\hat{a} = (Z'Z)^{-1} Z'x \quad (30)$$

のように求められる。

また、残差分散の最尤推定値は、回帰係数の最尤推定値  $\hat{a}$  を (28) 式に代入することで

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \|x - Z\hat{a}\|^2 \quad (31)$$

のように得られる。さらに、最大対数尤度は (8) 式で計算され、対応する AIC の値は

$$\text{AIC} = -2\ell(\hat{a}, \hat{\sigma}^2) + 2(k+1) \quad (32)$$

で与えられる。

注意すべき点は各対立仮説に対応するモデルは異なるデザイン行列  $Z$  と回帰係数  $a$  を持つことである。したがって、それぞれの AIC は  $Z$  と  $a$  によって異なるから、最小 AIC 法でモデル選択を行うことができる。

### 3.3 シミュレーションによる2種類アプローチの比較

次に仮説検定による分散分析法と最小 AIC 法による分散分析法のパフォーマンスを比較するためにシミュレーションを行う。

#### (1) シミュレーションの方法

簡単のため  $k=2$  の一次元二水準分散分析モデルについて考える。シミュレーション用のデータは次のモデルで発生する。

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij} \quad (i=1,2; j=1,2,\dots,n_i) \quad (33)$$

ここで、 $n_1 = n_2 = 51$ との設定により、合計データ数は  $N = n_1 + n_2 = 102$ 、各自由度は  $m_1 = k - 1 = 1$ 、 $m_2 = N - k = 100$ となる。総平均  $\mu$  は AIC などの値に影響を与えないので、 $\mu = 0$  と設定してよい。各誤差は標準正規乱数 ( $\sigma^2 = 1$ ) で実現している。

いま、 $\alpha_1 = -\alpha_2$  という関係から、両水準の効果に差がある場合に対応するデータを、効果の差が  $b = \alpha_1 - \alpha_2 = 2\alpha_1 > 0$  になるように発生する。ここで、発生したデータにそれぞれ効果に差があるモデル (モデル 1 とする) と効果に差がないモデル (モデル 0 とする) を当てはめて、それぞれの AIC (AIC1 と AIC0 とする) を計算する。もし、 $AIC0 > AIC1$  のような結果を得ることになれば、データ  $x_{1j}$  と  $x_{2j}$  について各水準の効果に差があることが最小 AIC 法で正しく確認されることになる。

一方、同一のデータについて (19) 式で統計値  $F^*$  を計算し、それぞれ有意水準  $\alpha = 0.01$  と  $\alpha = 0.05$  について F 検定を行う。この場合、 $f_{0.01}(1, 100) = 6.90$ 、 $f_{0.05}(1, 100) = 3.94$  について、もし (20) 式の関係が確認されたら、仮設  $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = 0$  が棄却され、つまり、両水準の効果に差があることが正しく確認されることになる。

## (2) シミュレーションの結果

いま、同様なシミュレーションを 100 回実行したとき、両水準の効果に差があることを正しく検証した回数を正解率 (百分数) と定義する。表 1 に両水準効果の差を 0.8 と 0.2 の間に変化させたときの 2 種類のアプローチに関するシミュレーションの正解率を示す。この結果から分かるように、両水準効果の差が小さくなるにつれて、各シミュレーションとも正解率が低くなるが、最小 AIC 法の方は F 検定を使用する方法に比べて格段に高い正解率を得ていることがわかる。

表 1. 各シミュレーションの正解率の比較 (単位は%)

水準効果の差 $b$	0.8	0.6	0.4	0.2
F 検定 ( $\alpha = 0.01$ )	100	83	4	0
F 検定 ( $\alpha = 0.05$ )	100	100	55	0
最小 AIC 法	100	100	100	12

F 検定を使用する方法では、有意水準  $\alpha$  の値を大きくすると見かけ上正解率が高くなるが、それを根拠にすぐそのパフォーマンスが改善されたとは言い難い。理由は次の通りである。一定の自由度  $m_1$ 、 $m_2$  と  $F^*$  の値について、有意水準  $\alpha$  の値を大きく設定すれば、 $100\alpha$  % 点  $f_\alpha(m_1, m_2)$  が小さくなるため、(20) 式がより容易に成立することによって F 検定がより簡単に通過できる。しかし、同

時に本来は両水準の効果に差がないのにそれがあるように判定されるような過誤も発生しやすいから、有意水準 $\alpha$ の値を適切に設定しなければならない。有意水準の決定はF検定による分散分析の難点の一つである。これに対し、最小AIC法について有意水準を設定する必要がないからこのような問題は発生しない。

いま参考として、両水準の効果に差がない、すなわち $b = 2\alpha_1 = 0$ について同様にデータを発生し、各シミュレーションを100回行った結果、いずれも100%で両水準の効果に差がないことが正しく検証された。

#### 4. 携帯情報端末上の実験データ解析への応用

ヒューマン・コンピュータ・インタフェースの分野では、ポインティングデバイスのパフォーマンスなどに関する研究が盛んに行われている。ここでは、最小AIC法による分散分析法を用いて携帯情報端末 (personal digital assistant: PDA) におけるターゲットポインティングタスク上の実験データの解析を行う。実験の詳細は溝淵・任・安村 (2003) にある。

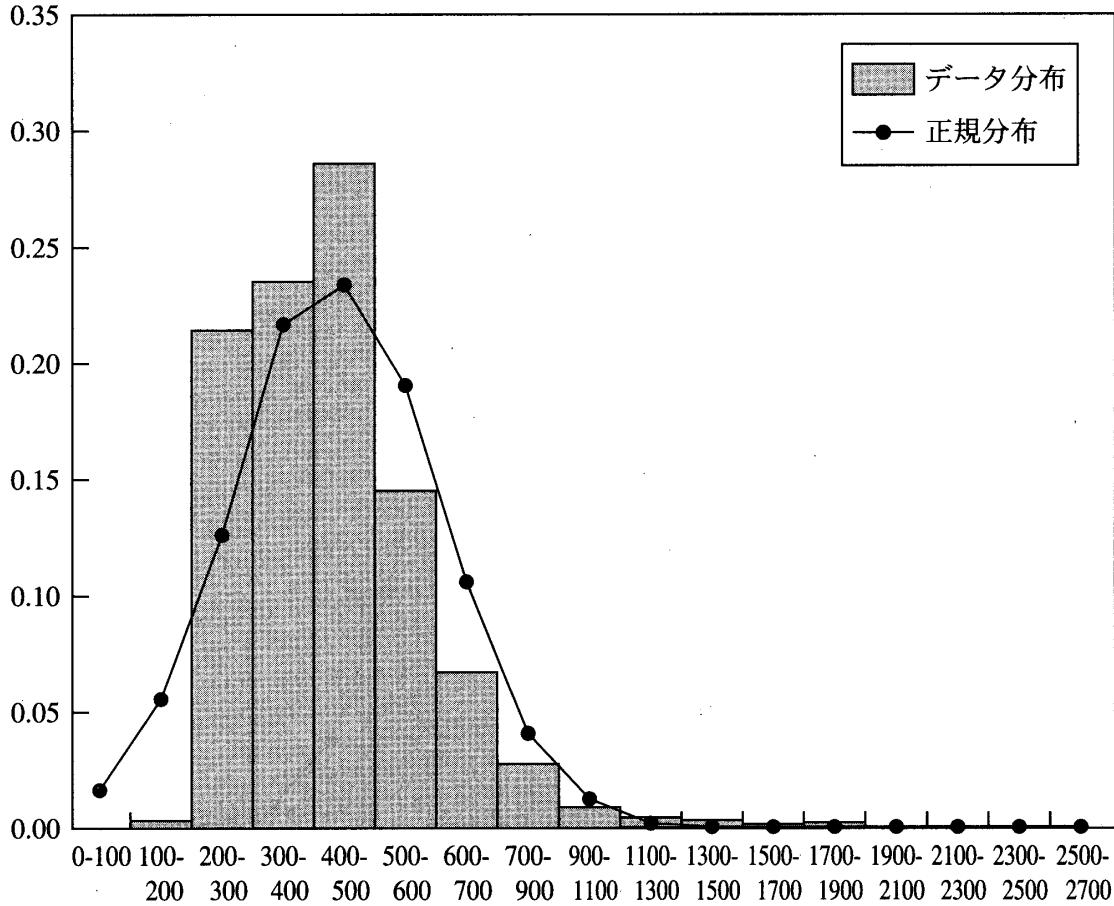
##### 4.1 データ

この実験における被験者は大学生12名である。タスクはPDAの画面上に提示されたターゲットをできるだけ迅速かつできるだけ正確にポイントすることである。PDAの画面上には白と黒の長方形が提示され、白い方をターゲットとする。ターゲットはポイントされると黒く表示され、同時にもう一方の黒い長方形は白く表示される。つまり、ターゲットは2つの長方形間でポイントされる度に左右交互に提示される。正しくポイントできない場合は、音のフィードバックを返される。本実験では、長方形の幅と長方形の中心軸間の距離をそれぞれ3通り、計9種類のターゲット条件がある。また、各条件につき、手・長いペン・短いペンによる3通りのポインティング方式についてそれぞれ30回の反復を行った。すなわち、1被験者あたりのポインティング回数は9条件×3ポインティング方式×30反復で、計810である。

実験のねらいから、前後のポインティングが完了された瞬間の時間間隔を測定し、これを操作時間という。12人の被験者の合計実験回数が $12 \times 810 = 9720$ であるが、30反復のなかで最初の各試行は操作時間の測定ができないため、有効な操作時間データは $3$  (入力方式)  $\times 3$  (ターゲット幅)  $\times 3$  (ターゲット間距離)  $\times 29$  (反復)  $\times 12$  (被験者)  $= 9396$ 個ある。

図1に操作時間の度数分布を示す。この図から分かるように操業時間データの分布は右側の裾が長く、正規分布から離れている。したがって、操作時間のデータに直接正規分布を仮定した統計モデルを当てはめても推定結果は偏ったものになり易い。

図1 元のデータの分布



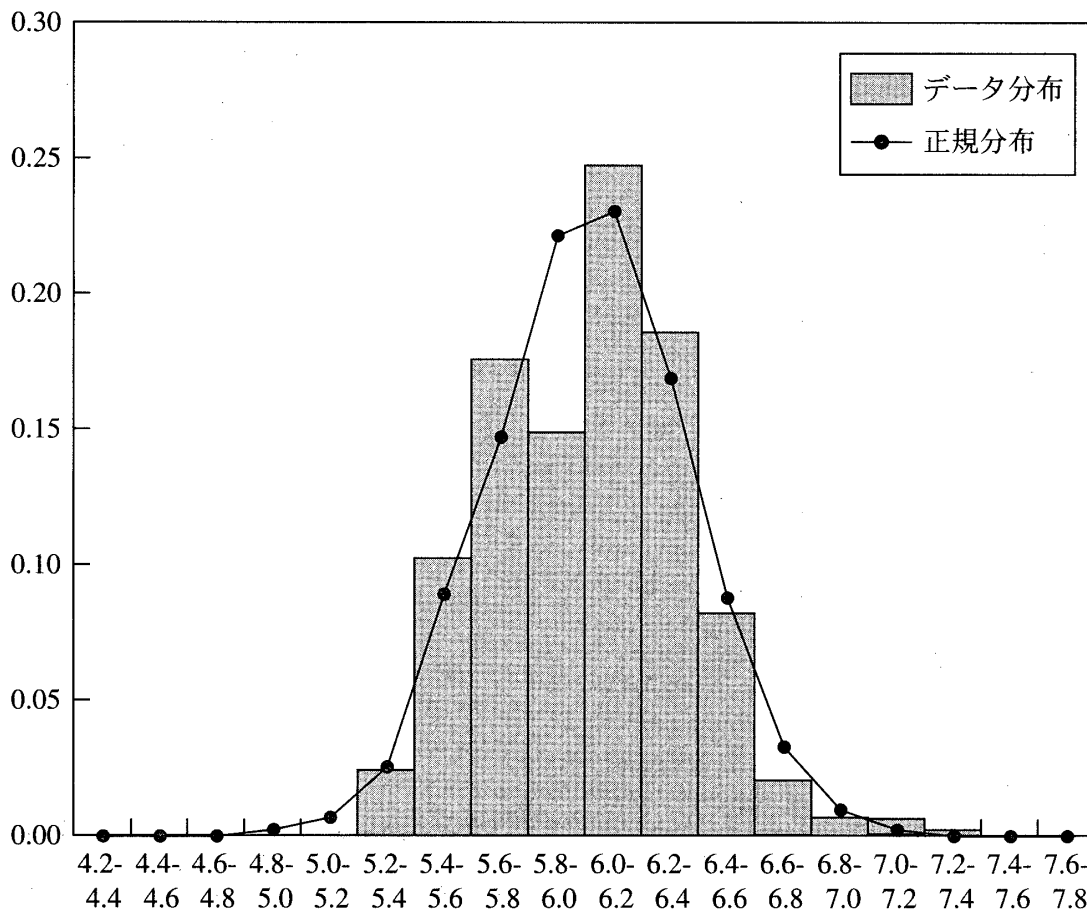
経験から図1のような分布は正規分布より対数正規分布に近い（蓑谷（1998）を参照）。つまり、操作時間を  $y$  とすると、

$$x = \ln(y) \quad (34)$$

という対数変換で得られた  $x$  についてのデータ分布が正規分布に近い。(34)式で対数変換したデータの度数分布は図2に示す。それはほぼ左右対称でより正規分布に近い形状をしている。

ここで、(34)式で対数変換した操作時間のデータを本解析の対象とする。本来のねらいは、ポインティング方式、ターゲット幅、ターゲット間距離および反復回数といった因子はどのように操作時間へ影響を及ぼすかを検証することであるが、対数関数の単調増加の性質から対数変換した操作時間について解析を施しても同様なねらいを達成できる。また、実験は各因子が直交するように計画されたので、各因子が独立であることがわかる。したがって、効果の差を検証するためのモデル選択は各因子について独立に一次元配置分散分析を行うことで実現できる。

図2 対数変換したデータの分布



## 4.2 ポインティング方式

### (1) モデル

ポインティング方式には「指によるポインティング」、「長いペンによるポインティング」と「短いペンによるポインティング」があり、それぞれ「方式1」、「方式2」と「方式3」で表す。ここで、次の5種類のモデルを考える。

モデル A0: 「各方式の効果が全部同等である」。

モデル A1: 「各方式の効果がそれぞれ異なる」。

モデル A2: 「方式1と2の効果が同等である」。

モデル A3: 「方式1と3の効果が同等である」。

モデル A4: 「方式2と3の効果が同等である」。

モデル A0 が元の仮説  $H_0$  に対応し、他のモデルはそれぞれ各対立仮説に対応するものである。

叙述の都合によりモデル A1, A2, A3 および A4 を先に示す。モデル A0 の説明を後にする。

・モデル A1

モデル A1 は次式で表す。

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij} \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, J) \quad (35)$$

ただし,  $x$  は対数変換した操作時間である。添字  $i = 1, 2, 3$  は各方式に対応し,  $j = 1, 2, \dots, J$  は他の試行の繰り返しを表す。ここで,  $J = 3132$  である。(18)式のように各方式の効果  $\alpha_i$  に

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \quad (36)$$

という関係があるから, モデル A1 は

$$\begin{aligned} x_{1j} &= \mu + \alpha_1 + e_{1j} \\ x_{2j} &= \mu + \alpha_2 + e_{2j}, \quad (j = 1, 2, \dots, J) \\ x_{3j} &= \mu - \alpha_1 - \alpha_2 + e_{3j} \end{aligned} \quad (37)$$

と表される。

行列・ベクトルの表現を使用するには

$$x = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1J}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2J}, x_{31}, x_{32}, \dots, x_{3J})^t \quad (38)$$

$$e = (e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1J}, e_{21}, e_{22}, \dots, e_{2J}, e_{31}, e_{32}, \dots, e_{3J})^t \quad (39)$$

$$a = (\mu, \alpha_1, \alpha_2)^t$$

$$Z = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & -1 & \dots & -1 \end{array} \right]^t$$

と置くと, モデル A1 は(26)式の線形回帰モデルで表記される。ここで, 目的変数ベクトル  $x$  と残差ベクトル  $e$  の長さは  $N = 3J = 9396$  であり, 回帰係数ベクトル  $a$  の長さは 3 である。したがって, パラメータ数は 4 となる。

・モデル A2

モデル A2 は, モデル A1 に

$$\alpha_1 = \alpha_2 \quad (40)$$

を付け加えることによって定義される。(36)と(40)式から $\alpha_2 = \alpha_1$ と $\alpha_3 = -2\alpha_1$ の関係が得られるので、このモデルは

$$\begin{aligned} x_{1j} &= \mu + \alpha_1 + e_{1j} \\ x_{2j} &= \mu + \alpha_1 + e_{2j}, \quad (j=1,2,\dots,J) \\ x_{3j} &= \mu - 2\alpha_1 + e_{3j} \end{aligned} \quad (41)$$

と表される。(38)と(39)で定義される $x$ と $e$ に併せて回帰係数とデザイン行列を改めて $a = (\mu, \alpha_1)^t$ と

$$Z = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & -2 & \dots & -2 \end{array} \right]^t$$

のように定義すると、モデルA2も(26)式のような線形回帰モデルで表記される。ここで、回帰係数ベクトル $a$ の長さは2であり、パラメータ数は3となる。

#### ・モデルA3

モデルA3は、モデルA1に

$$\alpha_1 = \alpha_3 \quad (42)$$

を追加することによって定義される。(36)と(42)式から $\alpha_2 = -2\alpha_1$ と $\alpha_3 = \alpha_1$ の関係が得られるので、このモデルは

$$\begin{aligned} x_{1j} &= \mu + \alpha_1 + e_{1j} \\ x_{2j} &= \mu - 2\alpha_1 + e_{2j}, \quad (j=1,2,\dots,J) \\ x_{3j} &= \mu + \alpha_1 + e_{3j} \end{aligned} \quad (43)$$

と表される。また、(38)と(39)式に併せて回帰係数とデザイン行列を改めて $a = (\mu, \alpha_1)^t$ と

$$Z = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & -2 & \dots & -2 & 1 & \dots & 1 \end{array} \right]^t$$

のように定義すると、モデルA3も(26)式と同一形式の線形回帰モデルで表わされる。



・モデル A4

モデル A4 は、モデル A1 に

$$\alpha_2 = \alpha_3 \quad (44)$$

を加えることで得られる。(36)と(44)式から $\alpha_2 = \alpha_3 = -0.5\alpha_1$ の関係が得られるので、このモデルは

$$\begin{aligned} x_{1j} &= \mu + \alpha_1 + e_{1j} \\ x_{2j} &= \mu - 0.5\alpha_1 + e_{2j}, \quad (j = 1, 2, \dots, J) \\ x_{3j} &= \mu - 0.5\alpha_1 + e_{3j} \end{aligned} \quad (45)$$

と表される。(38)と(39)式に併せて回帰係数とデザイン行列を改めて $a = (\mu, \alpha_1)'$ と

$$Z = \left[ \begin{array}{c|c|c} 1 \cdots 1 & 1 \cdots 1 & 1 \cdots 1 \\ \hline 1 \cdots 1 & -2 \cdots -2 & 1 \cdots 1 \end{array} \right]'$$

のように定義すると、このモデルも(26)式のような線形回帰モデルで表記される。

・モデル A0

モデル A0 はモデル A1 に

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \quad (46)$$

を追加することによって定義される。すなわち、このモデルは

$$x_{ij} = \mu + e_{ij}, \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, J) \quad (47)$$

と表されるから、本質的に $x_{ij}$ が独立な平均 $\mu$ 、分散 $\sigma^2$ の正規分布に従うと仮定したものとなる。

(2) 推定の結果

前述モデル A1 から A4 までの各モデルは線形回帰モデルで表現できるので、その推定や AIC の計算などは 3.2 節の方法を使用すればよい。モデル A0 は、各データが独立な正規分布に従うと仮定されることとなるので、 $N = 3J = 9396$  および  $n_1 = n_2 = n_3 = J = 3132$  と置くと、平均 $\mu$ と分散 $\sigma^2$ の推定値はそれぞれ(22)と(23)式で求められる。そして最大対数尤度と AIC はそれぞれ(8)と(24)式で計算される。ここで、パラメータ数 $m$ は2である。

比較のため、元の操作時間データ $y_{ij}$ についても対数変換したデータ $x_{ij}$ と同様な構造を持つモデル

を設定する。 $x_{ij}$ の各モデルと対応して $y_{ij}$ の各モデルを「モデルB0」、…、「モデルB4」とする。 $x_{ij}$ と $y_{ij}$ に関するモデルのAICは直接に比較することはできないが、 $y_{ij}$ に関するモデルのAICを

$$\text{修正 AIC} = (y_{ij} \text{ についての AIC}) - 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^J x_{ij} \quad (48)$$

のように修正すれば、この修正AICは $x_{ij}$ についてのAICと比較可能となる。各モデルのAIC等の結果は表2と表3に示す。

表2 ポインティング方式の各モデルのAIC (対数変換データ)

名称	モデル A0	モデル A1	モデル A2	モデル A3	モデル A4
特徴	全効果同	全効果不同	1と2効果同	1と3効果同	2と3効果同
AIC	6434.9	5941.1	6189.9	6405.0	5974.0

表3 ポインティング方式の各モデルのAIC (元のデータ)

名称	モデル B0	モデル B1	モデル B2	モデル B3	モデル B4
特徴	全効果同	全効果不同	1と2効果同	1と3効果同	2と3効果同
AIC	122763.2	122327.9	122548.1	122736.3	122356.0
修正 AIC	9667.0	9231.8	9452.0	9640.2	9259.8

表2と表3の結果から次のことが読み取れる。(1)対数変換データに関する各モデルのAICが元のデータに関する各モデルのAICより一様に小さい。したがって、対数変換のデータがより正規分布に近いことは情報量規準によって検証された。(2)モデルA1のAICが最小となっているので、3種類方式の効果がそれぞれ異なることが検証されている。

また、最小AICを得たモデルA1についての推定結果は次の通りである。 $\hat{\mu} = 6.0183$ ,  $\hat{\alpha}_1 = -0.1056$ ,  $\hat{\alpha}_2 = 0.0280$ , したがって、 $\hat{\alpha}_3 = -\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2 = 0.0776$ となる。これは3種類ポインティング方式の効果は、時間の短い順に「指による方式」、「長いペンによる方式」と「短いペンによる方式」となる。これはポインティングデバイス設計に対して興味深い結果である。

4.3 ターゲット幅とターゲット間距離

(1) ターゲット幅

ターゲット幅は pixel = 0.24mm を単位に「10」、「20」および「40」の3種類があり、それぞれ「幅1」、「幅2」と「幅3」で表す。ここで、ポインティング方式の場合と同じように次の5種類のモデルを考える。

モデル C0：「各種幅の効果が全部同等である」。

モデル C1：「各種幅の効果がそれぞれ異なる」。

モデル C2：「幅1と2の効果が同等である」。

モデル C3：「幅1と3の効果が同等である」。

モデル C4：「幅2と3の効果が同等である」。

$\alpha_1, \alpha_2$ と $\alpha_3$ を各種幅の効果に対応させると、これらのモデルはそれぞれ A0 から A4 までの各モデルと同様に表現される。各モデルの AIC は表4に示す。

表4 ターゲット幅の各モデルの AIC (対数変換データ)

名称	モデル C0	モデル C1	モデル C2	モデル C3	モデル C4
特徴	全効果同	全効果不同	1と2効果同	1と3効果同	2と3効果同
AIC	6434.9	5856.3	6020.0	6436.3	5987.2

表4からモデル C1 の AIC が最小となっていることがわかる。したがって、3種類幅の効果がそれぞれ異なることが検証されている。また、このモデルについての推定結果は次の通りである。 $\hat{\mu} = 6.0183$ ,  $\hat{\alpha}_1 = 0.1042$ ,  $\hat{\alpha}_2 = -0.0038$ , したがって、 $\hat{\alpha}_3 = -\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2 = -0.1004$ となる。つまり、操作時間はターゲット幅が広いほど短い。これは極めて自然な結果である。

(2) ターゲット間距離

ターゲット間距離は pixel = 0.24mm を単位に「100」、「200」および「300」の3種類があり、それぞれ「距離1」、「距離2」と「距離3」で表す。ここでも次の5つのモデルを考える。

モデル D0：「各種距離の効果が全部同等である」。

モデル D1：「各種距離の効果がそれぞれ異なる」。

モデル D2：「距離1と2の効果が同等である」。

モデル D3：「距離1と3の効果が同等である」。

モデル D4: 「距離 2 と 3 の効果が同等である」。

ターゲット幅の場合と同じように,  $\alpha_1, \alpha_2$  と  $\alpha_3$  を各種距離の効果に対応させると, これらのモデルは A0 から A4 までの各モデルと同様に表現される。各モデルの AIC は表 5 に示す。

表 5 ターゲット間距離の各モデルの AIC (対数変換データ)

名称	モデル D0	モデル D1	モデル D2	モデル D3	モデル D4
特徴	全効果同	全効果不同	1 と 2 効果同	1 と 3 効果同	2 と 3 効果同
AIC	6434.9	5508.4	5785.6	6435.1	5711.8

この結果からモデル D1 の AIC が最小となっていることがわかる。したがって, 3 種類距離の効果がそれぞれ異なることが検証されている。このモデルについての推定結果は次の通りである。 $\hat{\mu} = 6.0183, \hat{\alpha}_1 = -0.1313, \hat{\alpha}_2 = 0.0066$ , したがって,  $\hat{\alpha}_3 = -\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2 = 0.1247$  となる。つまり, 操作時間はターゲット間距離が長いほど長い。これも非常に自然な結果である。

また, ターゲット幅とターゲット間距離のモデルの推定結果は有名な Fitts の法則 (Fitts, 1954) に一致していることが非常に興味深い。

#### 4.4 操作の反復における習熟効果

操作の反復とは, 各被験者が同一ポインティング方式と同一ターゲット条件で操作を重複することである。一般に被験者が同一条件で操作を重複すると, 操作に慣れるにつれて操作時間が短くなることが考えられる。このような効果を習熟効果という。煩雑さを避け習熟効果について次のモデルを考える。

モデル E0: 「各反復の習熟効果が全部同等である」。

モデル E1: 「各反復の習熟効果がそれぞれ異なり, 自由に変動できる」。

モデル E2: 「各反復の習熟効果がそれぞれ異なり, 反復回数の線形式で減少する」。

モデル E3: 「各反復の習熟効果がそれぞれ異なり, 反復回数の非線形式で減少する」。

##### (1) モデル

###### ・モデル E0

いま, 第  $i$  反復の習熟効果を  $\gamma_i$  で表わすと, 習熟効果に関する基本モデルは

$$x_{ij} = \mu + \gamma_i + e_{ij} \quad (i = 2, 3, \dots, 30; j = 1, 2, \dots, J) \quad (49)$$

で与えられる。ただし、添え字  $j$  は操作の反復以外の因子についての試行番号であり、 $J = 324$  となる。モデル E0 では、 $\gamma_2 = \gamma_3 = \dots = \gamma_{30} = 0$  と仮定するので、(47) 式のモデル A0 と同様である。

・モデル E1

モデル E1 について各習熟効果に

$$\sum_{i=2}^{30} \gamma_i = 0 \quad (50)$$

という制約以外に他の制約を課さない。(50) 式から  $\gamma_{30} = -\sum_{i=2}^{29} \gamma_i$  がある。これをモデル (49) に代入

すると、モデル E1 は

$$\begin{aligned} x_{2j} &= \mu + \gamma_2 + e_{2j} \\ x_{3j} &= \mu + \gamma_3 + e_{3j}, \quad (j = 1, 2, \dots, J) \\ &\vdots \\ x_{[30]j} &= \mu - \sum_{i=2}^{29} \gamma_i + e_{[30]j} \end{aligned} \quad (51)$$

となる。

・モデル E2

E1 のようなモデルではパラメータが多すぎるため、安定な推定値を得ることは困難である。そのために習熟効果に新たに制約を付加して自由パラメータを減少させる必要がある。一般に習熟効果  $\gamma_i$  が反復回数  $i$  に比例して減少することを想定できるから、それに

$$\gamma_i = \beta_0 + \beta i \quad (52)$$

という直線制約を導入する。モデル導入の意図から、 $\beta$  はマイナスの値になることが予想できる。これに (50) 式を併せると、

$$\beta_0 = -16\beta$$

という関係を得る。したがって、

$$\gamma_i = (i - 16)\beta \quad (53)$$

となる。これを以って (49) 式のモデルを書き換えると、モデル E2 は

$$x_{ij} = \mu + (i-16)\beta + e_{ij} \quad (i = 2, 3, \dots, 30; j = 1, 2, \dots, J) \quad (54)$$

となる。モデル E2 に  $\mu$ ,  $\beta$  と  $\sigma^2$  (誤差の分散) の 3 つのパラメータがある。

・モデル E3

モデル E3 では、習熟効果  $\gamma_i$  が反復回数  $i$  に反比例して減少することを想定し、

$$\gamma_i = \beta_0 + \beta \frac{1}{i} \quad (55)$$

という曲線制約を導入する。ここで、モデル E2 の場合と異なり、 $\beta$  の値はプラスになることが予想される。(50) と (55) 式を併せて用いると、

$$\beta_0 = -\left(\frac{1}{29} \sum_{k=2}^{30} \frac{1}{k}\right)\beta$$

を得るから、

$$\gamma_i = \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{29} \sum_{k=2}^{30} \frac{1}{k}\right)\beta \quad (56)$$

となる。そしてモデル E3 はモデル (49) から

$$x_{ij} = \mu + \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{29} \sum_{k=2}^{30} \frac{1}{k}\right)\beta + e_{ij} \quad (i = 2, 3, \dots, 30; j = 1, 2, \dots, J) \quad (57)$$

と得られる。モデル E3 も E2 と同様に  $\mu$ ,  $\beta$  と  $\sigma^2$  (誤差の分散) の 3 つのパラメータを含むが、二つのモデルにおけるパラメータ  $\beta$  は異なる意味を持つことに注意すべきである。

モデル E1, E2, E3 のいずれも線形回帰モデルの形で表現できるから、その推定と AIC の計算は 3.2 節の方法を適用すればよい。

## (2) 推定の結果

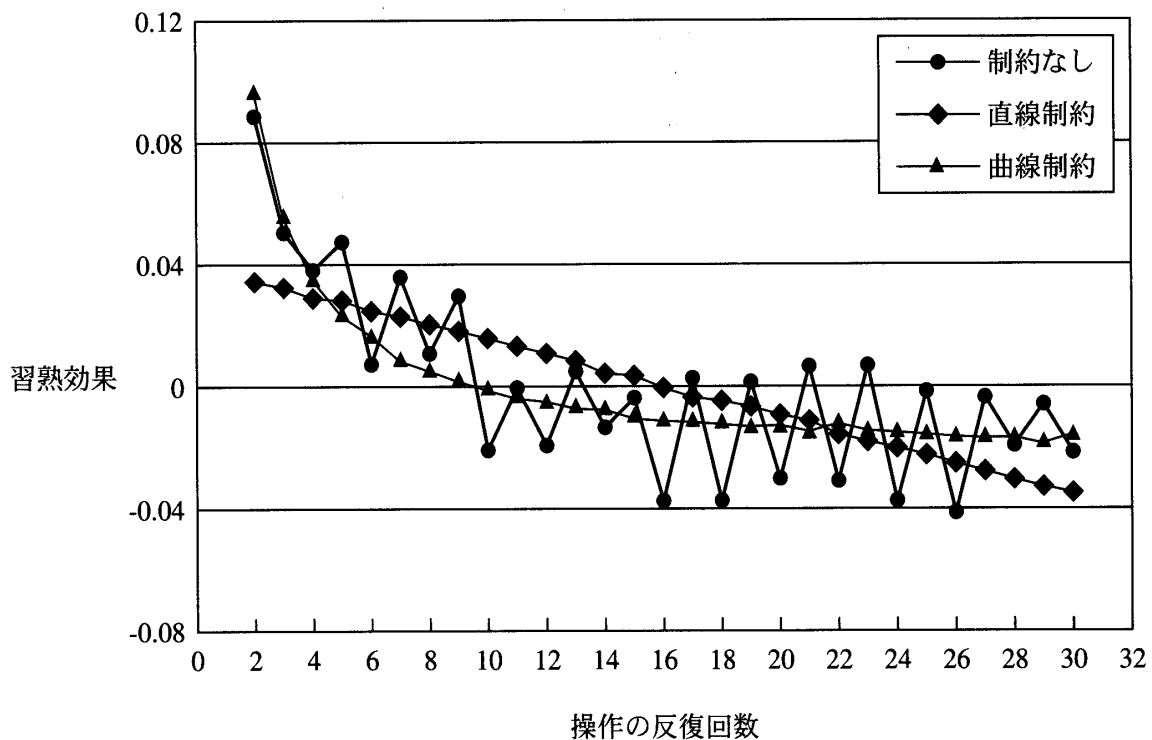
モデル E0, E1, E2 と E3 の AIC はそれぞれ 6434.9, 6415.6, 6402.1 と 6384.4 であり、モデル E3 は最小 AIC を持つため、曲線制約のモデルが最もよいモデルとなる。また、習熟効果のないモデル E0 と比較すれば、習熟効果を考慮した各モデルの AIC は いずれもより小さい AIC を得ているから、習熟効果があるという仮説が検証された。

最小 AIC のモデル E3 についての推定結果は、 $\hat{\mu} = 6.0183$ ,  $\hat{\beta} = 0.2488$  となっている。 $\hat{\beta}$  がプラスと

いうことは同一条件下で試行を繰り返すとともに操作時間が短くなることを意味するから、これは想定した習熟効果に一致している。

E1, E2 と E3 の各モデルで得られた習熟効果  $\gamma_i$  の推定値は図3に示す。この図から曲線制約のモデル E3 がより優れており、また、操作時間は第15回の反復までは急激に短くなり、その以後は安定していることがわかる。つまり、被験者は本実験の操作に早く慣れたことが計算結果からわかる。

図3 習熟効果の推定値



## 5. おわりに

情報量統計学の方法を用いた分散分析のアプローチを一つの体系化した統計解析法として導入するのが本稿のねらいである。情報量統計学の理論方法は情報量規準 AIC の誕生を原点に 30 年ほどの歴史を持っているが、統計学が応用される各分野ではそれは必ずしも十分認識されていないのが現状である。分散分析は経済、経営および工学の諸分野で広く使用されている統計解析法であるが、筆者らの知っている限りでは F 検定による分散分析法に比べて最小 AIC 法によるアプローチの方がその主流となっているとは言い難い。その原因は情報量統計学の理論・方法に対する認識の不足とその応用方法に関する技術指導の不充分さにあると思われる。そのために本稿では、情報量統計学のユーザーの立場から最小 AIC 法による分散分析法の理論概要、進め方とその特長および PDA 上の実

験データ解析への応用例を紙面の許す範囲で詳細に述べたわけである。

#### 参考文献

- [1] H. Akaike (1974), A new look at the statistical model identification, *IEEE Trans. Autom. Contr.*, AC-19, pp.717-723
- [2] 赤池弘次 (1976), 情報量規準 AIC とは何か: その意味と将来への展望, *数理科学*, No.153, pp.5-11
- [3] P.M. Fitts (1954), The information capacity of the human motor system in controlling the amplitude of movement, *Journal of Experimental Psychology*, Vol.47, pp.381-391
- [4] 北川源四郎 (1993), *FORTRAN77 時系列解析プログラミング*, 岩波書店
- [5] 坂元慶行・石黒真木夫・北川源四郎 (1983), *情報量統計学*, 共立出版
- [6] 蓑谷千風彦 (1998), *すぐに役立つ統計分布*, 東京図書
- [7] 溝淵佐知・任向実・安村通晃 (2003), 携帯情報機器でのターゲットポインティング課題におけるペンの長さの効果, *情報処理学会インタラクション2003 論文集*, Vol.2003, No.7, pp.147-154