# 平均の意味と正確な計算方法に関する浅見
## ― 調和平均の例解を中心に ―

張　　　興　和

目　次



**キーワード：**

調和平均、算術平均、平均速度、平均燃費、平均粒子径、平均人口密度、平均購入単価

### はじめに

2012年2月24日付「日本経済新聞」によると、大学生の4人に1人は「平均」の意味を正しく理解していないことが、日本数学会が2011年4月から7月にかけて国公私立大48校の大学一年生約6千人を対象に行った「大学生数学基本調査」で分かった[1]。

この調査結果に驚く人が多いのではないかと思うが、実は平均にはどのような意味があるのか、何のために平均を求めるのかも考えず、平均ならば場面も条件も全て無視して、単に機械的にデータを足してデータの数で割るような大学生が確かに多数いることは、著者も体験していることである。

例えば、図１に示すように、「旭川・札幌間を同じ道のりで往復したが、往路は平均時速80km、復路は平均時速20kmであったとする。往復の平均時速はいくらか。」という問題に対して、「50km」という回答が意外に多いのである。これは正に「往路時速と復路時速を足して２で割った」結果であり、間違っていることは明らかである。

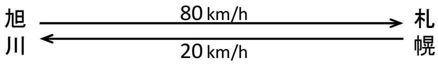


**図１　旭川・札幌間の往復の平均時速はいくらか**

後で詳細に示すが、往復の平均時速は実は50km/hを大きく下回った32km/hしかない。これは典型的な調和平均の例であり、多くの教科書にも類似な問題が取り上げられている。しかし、この問題だけに止まると、やはり調和平均の意味を十分に理解できず、今度は、平均速度ならば調和平均で算出すれば良く、調和平均の用途も平均速度の算出に限られると誤解してしまうのではないかと考えている。

平均は確かに小学５年生ごろから扱ってきた最もよく利用されている概念であるが、以上に示したように十分に理解せずに大学に入り、ひいては定着していないままに社会に出てしまう人さえいる。それにもかかわらず、平均に関する詳細な解説が載っている教科書は勿論、平均の正確な理解をテーマとした論文も見当たらないのが現状である。そこで本稿でこの空白を埋めたい。

平均には場面に応じて様々な平均[1]が必要であるが、その中でも調和平均が直感を裏切り最も混乱を招きやすいものであると思われる。これは「大学生数学基本調査」に出た平均とは異なるものではあるが、平均の本質は同じである。そのため、本稿では調和平均に焦点を当てて、調和平均は一体何の意味か、どんな特徴があるか、算術平均とどんな関係があるか、どんな場合に調和平均を使うべきか、などを明確にしたい。

速度の平均問題は最も身近な例なので、まず平均速度の求め方を通じて、平均の意味を再確認し、問題の条件に応じて如何にして正確な平均を求めるかを論じていく。その上に、平均速度以外の調和平均を検討し、調和平均に対する理解を一層深め、何を基準にする時に調和平均を取るかを考察したい。

正確に理解させるためには、上手な言葉で説明するよりも適切な例で示すほうが効果的である。これは筆者が教わるときには強く実感し、教える立場になってからは常に注意を払っていることである。そこで、本稿では難しい計算式を一切使わず、抽象的な説明をできるだけ減らし、代わりに著者が考案し説得力があると思う計算例を多く示すことにする。

1　倍率（あるいは増加率、伸び率や成長率など）の平均を求めるのに用いる幾何平均、円筒状炉壁の伝熱面積の平均を求めるのに用いる対数平均、データのばらつきを示す分散（標準偏差）を求めるのに用いる二乗平均（あるいは二乗平均平方根）なども良く利用されている平均である。

特に３節には各分野に利用される代表性的な例をできるだけ多く列挙する。このような多くの応用例を通じて、学生の知識を広めると同時に、調和平均に対する興味を高め、様々な実際の課題を解決する能力を養うことを期待しているが、その分だけ紙面が長くなる。しかし、この節の例は互いに独立したものなので、興味があり理解しやすいものだけを選んで読んでも全く問題がない。

問題の本質を理解しやすくするため、計算自身をできるだけ簡単化する。まず、調和平均（単純調和平均）に比べ加重調和平均の計算が複雑なので、加重調和平均の計算例を２つにとどめ、紙面を調和平均に譲る。また、全ての計算例では２つの値の平均にのみ限定した上で、暗算でもできる程度の簡単な値（全てが架空のもの）を選択し例に使用する。３つ以上の値の平均を取る場合は、考え方が全く同じであるので、計算方法を類推すれば正確に計算できると考えているからである。

## 1　指標の加重算術平均と一致する調和平均

### 1.1 調和平均とは何か

言うまでもなく、移動の平均速度とは行程全体の各区間の速度の代表値であり、全体で進んだ道のりの和を全体でかかった時間の和で割って算出できる。

上述の旭川・札幌間で異なる速度（往路80km/h、復路20km/h）で往復する問題では、往路と復路は同じ道のりなので、往路の移動距離と復路の移動距離が同じであることが分かる。片道の移動距離をＬkmと仮定すると、往復の移動距離の和が２Ｌkm、往復でかかった時間の和が$\frac{L}{80}+\frac{L}{20}$時間であるため、移動の平均速度の定義により、往復の平均速度は以下のように算出できる。

$$v=\frac{2L}{\frac{L}{80}+\frac{L}{20}}=\frac{2}{\frac{1}{80}+\frac{1}{20}}=\frac{2\times 80\times 20}{80+20}=32 \quad (\mathrm{km/h})$$

計算過程からもわかるように、平均速度は結局両市間の距離と関係なく、往路速度と復路速度とのみに依存する。この計算方法は、正に調和平均（単純調和平均）そのものである。

### 1.2 加重調和平均の意味と算出方法

往復が同じ道のりの場合、往復の平均速度は調和平均で求めることを示したが、往復の道のりが異なる場合はどうなるかを考えなければならない。

表１はより一般的な状況を示すものである。行程を必ずしも二等分ではない前半部分と後半部分に分け、それぞれの移動距離、所要時間が分かれば、それぞれの移動速度[2]が求まる。

２　ここでの移動速度は平均速度を意味する。

**表１　行程の前半部分と後半部分の移動速度**

| | 前半 | 後半 |
|---|---|---|
| 移動距離（km） | $L_1$ | $L_2$ |
| 所要時間（h） | $t_1$ | $t_2$ |
| 移動速度（km/h） | $\mathbf{v}_1=\dfrac{\mathbf{L}_1}{\mathbf{t}_1}$ | $\mathbf{v}_2=\dfrac{\mathbf{L}_2}{\mathbf{t}_2}$ |

行程の前半と後半のそれぞれの移動距離、所要時間が分かれば、行程全体の平均速度は定義式

$\mathbf{v}=\dfrac{\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2}{\mathbf{t}_1+\mathbf{t}_2}$によって直接に算出できる。

しかし、行程の前半と後半の所要時間が分からず、その代わりにそれぞれの移動速度が与えられた場合では、前半と後半の所要時間はそれぞれの移動距離と移動速度で算出しなければならない。この時、$\mathbf{t}_1=\dfrac{\mathbf{L}_1}{\mathbf{v}_1}$、$\mathbf{t}_2=\dfrac{\mathbf{L}_2}{\mathbf{v}_2}$となるので、行程全体の平均速度は、$\mathbf{v}=\dfrac{\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2}{\dfrac{\mathbf{L}_1}{\mathbf{v}_1}+\dfrac{\mathbf{L}_2}{\mathbf{v}_2}}$と変形できる。これは距離を重みとする加重調和平均と呼ばれる。

もし前半と後半の移動距離が同じであれば、移動距離が式から消え、移動距離と無関係の単純調和平均となる。つまり、加重調和平均はより一般的なケースであり、単純調和平均は加重調和平均の特例（重みがすべて同じ）に過ぎない。単純調和平均はその「単純」を省略して単に調和平均と呼ぶことが多い。

表２は加重調和平均速度と調和平均速度の計算条件と計算式をまとめて示したものである。

**表２　移動速度と移動距離による調和平均（加重調和平均）**

| | 前半 | 後半 | 加重調和平均 | 調和平均（$L_1=L_2$） |
|---|---|---|---|---|
| 移動速度（km/h） | $v_1$ | $v_2$ | $\mathbf{v}=\dfrac{\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2}{\dfrac{\mathbf{L}_1}{\mathbf{v}_1}+\dfrac{\mathbf{L}_2}{\mathbf{v}_2}}$ | $\mathbf{v}=\dfrac{\mathbf{2}}{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{v}_1}+\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{v}_2}}=\dfrac{\mathbf{2}\,\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2}$ |
| 移動距離（km） | $L_1$ | $L_2$ | | |

上述の旭川・札幌間の同じ道のりを異なる速度で往復する問題は、調和平均（単純調和平均）の計算例である。

もし往復の道のりが異なり、例えば往路が遠回りをしてその移動距離が復路の２倍にした場合はどうなるのだろうか。この時、移動距離の差異を考慮する必要があり、距離を重みとする加重調和平均で平均速度を算出しなければならない。復路の移動距離をＬとすると、往路の移動距離が２Ｌとなるので、これを加重調和平均の計算式に代入すると、以下の計算で示すように、平均速度が40km/hとなる。

$$\mathbf{v}=\frac{\mathbf{L_1}+\mathbf{L_2}}{\frac{\mathbf{L_1}}{\mathbf{v_1}}+\frac{\mathbf{L_2}}{\mathbf{v_2}}}=\frac{\mathbf{2L+L}}{\frac{\mathbf{2L}}{\mathbf{80}}+\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{20}}}=\frac{\mathbf{2+1}}{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{80}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{20}}}=\frac{\mathbf{3\times 80\times 20}}{\mathbf{2\times 20+80}}=\mathbf{40}\quad (\mathrm{km/h})$$

この結果を往復が同じ道のりの場合と比較すると、平均速度が大きくなったことが分かる。これは、高速の往路の移動距離が低速の復路より長くなり、高速が平均速度への貢献が低速より大きくなったからである。これは「加重」による効果であり、平均速度は距離が長いほうの速度に寄り、しかも距離の差が大きいほど、その効果もより顕著になる。

### 1.3 調和平均と加重算術平均の一致性

上述の旭川・札幌間の同じ道のりを異なる速度で往復する問題で、平均速度は旭川・札幌間の距離と無関係であることが分かったが、ここでその距離を140 ㎞と仮定する。そうすると、往路と復路の所要時間がそれぞれ、140km÷80km/h＝1.75h、140km÷20km/h＝7hとなるので、平均速度は以下のように時間を重みとする加重算術平均でも算出できる。

$$\mathbf{v}=\frac{\mathbf{v_1t_1+v_2t_2}}{\mathbf{t_1+t_2}}=\frac{\mathbf{80\times 1.75+20\times 7}}{\mathbf{1.75+7}}=\frac{\mathbf{280}}{\mathbf{8.75}}=\mathbf{32}\quad (\mathrm{km/h})$$

この結果は、調和平均速度が時間を重みとする加重算術平均速度と一致することを示している。これは現在のデータによる偶然な結果ではなく、一般性[3]を持っている。

ここでは速度という指標を例にして、調和平均がその指標の分母の量（速度の場合は時間である）を重みとする加重算術平均と一致することを示したが、速度のような２種の量の比である他の指標でも同様であることは言うまでもない。

## 2　指標の逆数の算術平均と一致する調和平均

### 2.1 速度と「単位距離当たり時間」

上述の旭川・札幌間の同じ道のりを異なる速度で往復する問題では、「速度」の分子である距離を基準にしているので、往復の平均速度は調和平均で算出できることが分かった。

一方、移動の遅速の程度は、速度の逆数である「単位距離当たり時間」で表すこともできる。そうすると、基準にしている距離が分母に変わるので、「単位距離当たり時間」の平均は算術平均となる。

表３は、速度80と20km/hの調和平均32km/hが、速度の逆数である「単位距離当たり時間」0.75と3

３　調和平均速度の前提条件は前半と後半の距離が同じなので、 $\mathbf{v_1t_1=v_2t_2}$ が成立するわけである。これを調和平均速度の計算式に代入すれば、時間を重みとする加重算術平均速度 $\mathbf{v}=\frac{\mathbf{2}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{v_1}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{v_2}}}=\frac{\mathbf{v_1t_1+v_2t_2}}{\mathbf{t_1+t_2}}$ になり、調和平均が時間を重みとする加重算術平均と一致することが簡単に証明できる。

min/kmの算術平均1.875min/km（＝32km/h）と一致することを示している。

**表３　速度の調和平均と「単位距離当たり時間」の算術平均**

| 指標 | 往路 | 復路 | 計算式と平均値 | 平均方法 |
|---|---|---|---|---|
| 速度（km/h） | 80 | 20 | $\mathbf{v = \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2} = \frac{2\times 80\times 20}{80+20} = 32}$ | 調和平均 |
| 単位距離当たり時間（min/km） | 0.75 | 3 | $\mathbf{\frac{0.75+3}{2} = 1.875}$ | 算術平均 |

表３は具体的な数字で速度の調和平均が速度の逆数である「単位距離当たり時間」の算術平均と一致することを示したが、一般式で示すと次のようになる。

速度の調和平均の計算式$\mathbf{v = \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}}$に対して、全ての速度（v，$v_1$，$v_2$）をその逆数に変形すると、

$\mathbf{\frac{1}{v} = \frac{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}}{2}}$となり、これがちょうど「単位距離当たり時間」の算術平均である。

### 2.2 人口密度と「一人当たり面積」

人口規模が全く同じであるＡ市とＢ市があり、それぞれの人口密度が400 、100人/km$^2$であるとして、この両市の平均人口密度を求めることを考えてみる。

これは「人口密度」の分子である人口を基準とする問題なので、平均人口密度は調和平均で求める。一方、人口の疎密程度を人口密度の逆数である「一人当たり面積」で表すと、算術平均となる。

表４は具体的な計算式と結果を示し、人口密度の調和平均160人/km$^2$と「一人当たり面積」の算術平均0.625ha/人が同じであることがわかる。

**表４　人口密度の調和平均と「一人当たり面積」の算術平均**

| 指標 | Ａ市 | Ｂ市 | 計算式と平均値 | 平均方法 |
|---|---|---|---|---|
| 人口密度（人/km$^2$） | 400 | 100 | $\mathbf{\frac{2\times 400\times 100}{400+100} = 160}$ | 調和平均 |
| 一人当たり面積（ha/人） | 0.25 | 1 | $\mathbf{\frac{0.25+1}{2} = 0.625}$ | 算術平均 |

### 2.3 労働生産性と「一個当たり時間」

ある種の製品を１個作製するのに、Ａ君とＢ君がそれぞれ12、6 minかかるとする。両者平均で何分かかるかを考えてみよう。

両者の作業時間が同じである[4]と考えれば、「一個当たり時間」の分子である作業時間を基準にすることになり、両者の平均時間は調和平均で算出する。一方、生産能力を「一個当たり時間」の逆数である労働生産性（一時間当たりの個数）で表すと算術平均となる。

表５は労働時間制の場合で「一個当たり時間」の調和平均８min/個と労働生産性（一時間当たりの個数）の算術平均7.5個/hが同じであることを示すものである。

**表５　「一個当たり時間」の調和平均と労働生産性の算術平均**

| 指標 | A君 | B君 | 計算式と平均値 | 平均方法 |
|---|---|---|---|---|
| 一個当たり時間（min/個） | 12 | 6 | $\frac{2\times 12\times 6}{12+6}=8$ | 調和平均 |
| 労働生産性（個/h） | 5 | 10 | $\frac{5+10}{2}=7.5$ | 算術平均 |

## 3　各分野で幅広く利用されている調和平均

### 3.1 並列接続の平均電気抵抗

電気回路に電流が流れる時、この流れを妨げようとするのが電気抵抗であり、単位にはオーム（Ω）が用いられるが、単位電流当たりの電圧を意味する。

電気回路の抵抗の接続には、直列、並列があるが、並列接続の場合、電気抵抗にかかる電圧が同じなので、電圧を基準に平均を考えなければならない。そのため、並列接続の平均電気抵抗は調和平均で算出される[5]。

例えば電気抵抗が10と90Ωの２つの電気抵抗器が並列に接続された場合、平均電気抵抗は $\frac{2\times 10\times 90}{10+90}=18$（Ω）となる。ちなみに、その合成電気抵抗は平均電気抵抗の半分の９Ωである。

### 3.2 粒子充填層の平均粒子径

粒子充填層は化学工業や冶金工業で広く利用される反応装置である。著者が研究してきたスクラップ溶解用コークス充填層の場合では、その中の充填粒子間をガスが下から上へ、溶銑が中部から下へ流れながら、流体（ガスや溶銑）と粒子表面との間で摩擦が生じ、反応や熱交換が行われるので、充填粒子の比表面積が充填層内の圧力損失、化学反応速度や熱交換速度のすべてを直接に左右する。

---

４　労働時間制の場合は両者の作業時間が同じであり、裁量労働制の場合は両者の作業量が同じであると考えられるが、ここでは労働時間制であると仮定する。

５　並列接続の平均電気抵抗のように調和平均で算出される物理現象はよく見られる。他には直列接続のコンデンサーの平均容量や、直列接続のバネの平均バネ定数などがある。

粒子の比表面積とは、単位体積[6]当たりの表面積である。球体の場合、粒子の比表面積は球体の表面積と体積の比$\pi d^2 \Big/ \frac{\pi}{6} d^3 = \frac{6}{d}$で算出されるので、粒子の比表面積は粒子径に反比例する。

粒子径の異なる多種類の粒子を混合した充填層の場合、問題を簡単化にするため、粒子の一個一個に着目することではなく、粒子の全体を平均的に扱うのが一般的である。粒子の比表面積が充填層内のプロセスを左右するので、当然粒子の全体を平均的に扱うことは、粒子の比表面積を平均的に扱うことを意味する。

例えば粒子径がそれぞれ$d_1$、$d_2$の２種類の球体粒子から充填された場合、平均比表面積は２種類の粒子の比表面積の算術平均$\frac{6}{d} = \left(\frac{6}{d_1} + \frac{6}{d_2}\right) \Big/ 2$で求められるが、これは実に、粒子径の調和平均$d = \frac{2 d_1 d_2}{d_1 + d_2}$と同じである[2)]。

このように、本来は比表面積の算術平均を取っているが、形式上では、粒子径の調和平均となっているだけである。

### 3.3 自動車の平均燃費

燃費が40の低燃費車と燃費が10の高燃費車を１台ずつ持っているとする。この２台の自動車の平均燃費はいくらかを考えてみる。

燃費は走行距離とガソリン消費量の比であり、km/Lという単位で表す。車の利用目的は決してガソリンの消費ではないので、同じ走行距離で考えなければならない。つまり、これは燃費の分子である距離を基準にしている問題であり、平均燃費[7]は調和平均$\frac{2 \times 40 \times 10}{40 + 10} = 16$（km/L）で算出される。

実は国によって燃費の表示方法が異なる。日本及び米国では、単位燃料量あたりの走行距離（km/L）を用いるが、欧州や中国では一定距離を走行するのに必要な燃料量（L/100km）を用いる。欧州式燃費は数値が小さいほど低燃費であるが、日本式燃費は逆に数値が大きいほど「低燃費」となり、誤解を防ぐためその代わりに「良燃費」や「省燃費」という人もいる。

上記の２台の自動車の燃費40、10km/Lを欧州式に直すと、それぞれが2.5、10L/100kmとなる。欧州式では基準にしている距離が燃費の分母に変わったので、平均燃費が算術平均で求められ、(2.5+10)/2 ＝6.25 L/100kmとなる。これを日本式に戻すと当然16km/Lとなる。

6　粒子の比表面積は工業上では単位重量当たりの表面積で表す場合が多い。体積に密度を掛ければ重量になるので、分母にある体積が体積と密度の積に変わる。ここでは分かりやすいため、単位体積当たりの表面積にする。

7　自動車の燃費に似ている指標には、冷房（または暖房）の省エネ性能を表す成績係数COP[Coefficient Of Performance]がある。冷房COPは、消費電力1kWに対しての冷却能力であり、冷房COP＝冷房能力(kW)÷冷房消費電力(kW)で算出される。異なるCOPの冷房の平均COPは、異なる燃費の自動車の平均燃費と同様に調和平均で算出すべきである。

これは正に２節で示したように、日本式燃費の調和平均が、その逆数である欧州式燃費の算術平均と一致する。

### 3.4 株式投資の平均購入単価

価格が変動するある特定銘柄の株を毎月購入する場合、定額購入と定数購入の２種類の購入方法が考えられる。ここで、株の単価が300と100円/株であるように変動し、毎月3,000円分の定額購入方法と、毎月15株の定数購入方法を仮定し、それぞれの平均購入単価を考える。

購入実績を２ヶ月だけとし、２種類の購入方法に対して、それぞれの毎回の購入額と購入数、合計投資額、及びそれぞれの平均購入単価を詳細に表６に示した。

**表６　定額購入と定数購入の平均購入単価**

| 購入時期 | 単価（円/株） | 定額購入 | | 定数購入 | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 購入額（円） | 株数（株） | 購入数（株） | 金額（円） |
| １ヶ月目 | 300 | 3,000 | 10 | 15 | 4,500 |
| ２ヶ月目 | 100 | 3,000 | 30 | 15 | 1,500 |
| 合　　計 | | 6,000 | 40 | 30 | 6,000 |
| 平均購入単価（円/株） | | 150 | | 200 | |

表２に示す通りに、具体的な購入金額や購入株数が分かれば、平均購入単価はそれぞれの購入金額合計と購入株数合計との比で求められる。定額購入の平均購入単価が定数購入時より低いことがわかる。

実は定額購入の平均購入単価は、単価の分子である購入額を基準にしているので、購入単価の調和平均 $\frac{2\times300\times100}{300+100}=150$ （円/株）である。毎回の購入額が一定であれば、平均購入単価はその額の多少には影響されない。

これに対して、定数購入の平均購入単価は、単価の分母である株数を基準にしているので、購入単価の算術平均 $\frac{300+100}{2}=200$ である。毎回の購入株数が同じであれば具体的な購入数と無関係である。

このような定額購入の投資手法は、ドル・コスト平均法と呼ばれ、投資のリスクを抑える手法として 1940 年代にアメリカで開発されたものである。この方法には平均購入単価を引き下げる効果があるため、投資手法としてよく利用されると言われている[3,4]。

### 3.5 製作部品の平均不合格率

ある工場では２種類の部品（部品Ａと部品Ｂ）を製造している。規格通りに加工されていない場合

は、検査で不合格（不良品）と判定される。先月では２種類の部品の不良品の数が全く同じであるが、不合格率はそれぞれ２％と６％であった。その時の平均不合格率を求める。

不良品の数が同じなので、不合格率の分子である不良品の数を基準に平均を取る必要がある。これは調和平均 $\frac{2\times2\times6}{2+6}=3$ で算出し、平均不合格率は３％である。

今単純に個数で考えたが、もし部品Ａが20円/個、部品Ｂが540円/個と単価が異なる場合、金額上での平均不合格率を考えたい。その時、金額を基準にしなければならないが、不良品個数が同じなので、不良品分の金額はその単価に比例する。従って、この時の平均不合格率は単価を重みとする加重調和平均 $\frac{20+540}{20/2+540/6}=5.6$ （%）で算出される[5)]。

個数で考える時、平均不合格率が３％であり、不合格率の低い方２％に寄るが、単価を考慮した金額で考えると、平均不合格率が5.6％となり、逆に不合格率の高い方６％に近づく。このように、何を基準にするかにより、平均値が大きく変わるので、この平均値を示す時に、個数基準か金額基準かを明示する必要がある。

## 4　要素間のバランスを重視する調和平均

### 4.1 調和平均の特徴

以上では調和平均は指標の加重算術平均、あるいは指標の逆数の算術平均と一致し、調和平均と算術平均の内在関係を示した。この場合、調和平均と算術平均は独立ではない。一組の数値に対して、調和平均を取る場合は、その算術平均を取ることはできない。

ここでは、一組の数値に対して、理論上では調和平均と算術平均のどちらを取ることもでき、具体的にどれを採用するかは、目的に合わせて分析者の意思で決める場合、調和平均はどんな特徴を持つか、どんな場合に調和平均とすべきかを考える。

まずは２変量ｘとｙが共に0～10の値を取り、仮にその和が常に10であるとする。その時の両者の算術平均と調和平均を取ると、図２に示す結果になる。

グラフは調和平均が常に算術平均以下にあることを示しているが、実は必ずこうなるのである。「調和平均≦算術平均」という関係は簡単に証明できる[8]。

8　任意の x>0、y>0 に対して、$(x-y)^2\ge0$ が成立することから、$x^2-2xy+y^2\ge0$、更には $x^2+2xy+y^2\ge4xy$、つまり $(x+y)^2\ge4xy$ が成立する。この式の両側を $2(x+y)$ で割れば、$\frac{x+y}{2}\ge\frac{2xy}{x+y}$ となる。これは、ｘとｙが同じ値であれば調和平均が算術平均に等しいが、それ以外では調和平均が算術平均より小さいことを意味している。

また､算術平均を見ると、xとyが共に５である時は平均値も５である。一方の値が小さくなる時、もう一方の値が同等に大きくなれば平均値が５のまま維持できる。たとえ一方の値が０であっても、もう一方の値が10であれば、平均値が依然として５となる。そのため、算術平均は「取長補短」タイプの平均であると言える。

これに対して、調和平均の場合は、xとyが共に５である時は平均値も５であるが、それは最大値となる。xとyのどちらかの一方の値が小さくなるにつれて、もう一方の値がその分多くなっても、平均値が小さくなる。

両者の差異がそれほど大きくない段階（５の近辺）では平均値の低下が緩やかである。例えば、４と６の調和平均は4.8であり、算術平均の５とそれほどの差がない。もっと近い値の調和平均であれば、もっと算術平均に近づき、間違って算術平均を取ってしまったとしても気付かないほどである。しかし、片方の値がゼロに近くなると、平均値がゼロに向かって急激に減少する。要するに、調和平均は大きい値からの貢献が小さく、小さい値に左右される特徴を持つ。そのため、調和平均は「バランス重視」タイプの平均であると言われる。

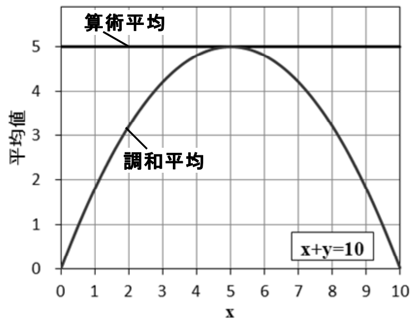


**図２　調和平均と算術平均の比較**

例えば10点満点の２科目のテストが行われたとする。算術平均を取るのが一般的に行われるが、この２科目にバランスが取れたかどうかという視点から評価するならば調和平均を用いるべきである。たとえ２科目とも１点しか取れなくても調和平均点が１点である。それに対して、その中の１科目が０点[9]で、もう１科目がたとえ満点を取れても調和平均点が０点となる。ようするに、要素間の調和が取れているかを見るのが調和平均である。

9　調和平均の定義式$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$によれば、値が０のデータが含まれると、調和平均は計算できない。Excel2007の関数HARMEAN(x,y)を用いて計算する時も同様である。しかし、定義式を$\frac{2xy}{x+y}$に変形すれば、たとえ１つのデータの値が０であっても、調和平均を求めることができる。ここでは調和平均に小さい値の影響を強調するために、「０への極限」ではなく、直接に０点とした。

### 4.2 調和平均によるETロボコンの総合得点

ETロボコンとは、2002年から始まった「組込みシステム技術（Embedded Technology)」の走行体競技である[6)]。コンテストでは「モデル審査」と「走行競技」の２部門で評価されるが、その総合得点は「モデル審査得点」と「走行競技得点」の調和平均で算出すると決まっている。調和平均で算出する理由に関しては、以下のように説明されている[7)]。

近年の組込みソフトウェア開発では、保守性や移植性に代表される開発時の品質と、信頼性や効率性に代表される最終製品の品質の両方をバランスよく追求することが重要である。そこで審査委員会は、モデルの良さと走行の良さを「同程度に重視」し、さらに「両方がバランスよく達成」されている場合に取り組みの全体を高く評価する。

もし算術平均を取ると、両値のちょうど真ん中が平均値となり、モデルあるいは走行のどちらかが極端に良ければ一方が悪くとも総合結果がある程度良いものになってしまう。一方、調和平均ではいずれか小さいほうの値に平均値が寄るため、同じ状況では総合結果は悪いものとなる。つまり、調和平均によって得られる総合結果は両値のバランスの程度を幾らか反映する。

### 4.3 調和平均による情報検索性能の総合評価

情報検索とは、コンピュータを用いて大量のデータ群から目的に合致したものを取り出すことである。情報検索システムの検索性能は適合率（precision）と再現率（recall）を測定することにより判定するのが一般的である。

適合率は目的に合った文書（適合文書）が検索結果にどれだけ含まれているかという正確性の指標であり、再現率は検索対象としている文書群の中に存在する適合文書のうちどれだけ検索結果に含まれているかという網羅性の指標である。

適合率を上げれば再現率が下がり、再現率を上げれば適合率が下がる傾向にあるため、総合評価指標（Ｆ値）は適合率と再現率の調和平均によって求められ、両者のバランスが良い時に高い総合評価となる[8)]。

## おわりに

本稿では平均速度を始め数多くの調和平均例を示した。その中で、平均粒子径のような、実質上では平均比表面積を取るが形式上では粒子径の調和平均になるような特例もあれば、往復平均速度や平均燃費のような、調和平均で計算しなければならないものも数え切れないほどある。いずれにせよ、これらの平均は理屈上から調和平均を使わないと正しい結果を求められない。

しかし、最も魅力があるのは、ETロボコンや情報検索システムの総合評価のような、要素間のバランスを重視するため、意図的に取った調和平均であると考えられる。調和平均の目標関数の最大化を

追求することにより、要素間の最適なバランスが達成できるからである。

調和平均は直感に反し、嫌われものになりがちであるが、調和平均には「偏らず、極端に走らず、バランスが取れる」の意味合いが含まれるので、経済と環境、仕事と生活などを、調和平均的に考え、調和平均的に行動すれば、本当の調和的社会に入るのではないだろうか。

最後に、本稿の執筆にあたっては、本学経済学部教授平山雄三博士より有益な助言と共に詳細な日本語訂正を頂いた。ここに深く感謝を申し上げたい。勿論、論文に含まれる誤りはすべて筆者の責任に帰する。

## 参考文献

１）日本経済新聞「大学生４人に１人、平均の意味理解せず」(2012.2.24掲載)、http://www.nikkei.com/article/DGXNASDG24024_U2A220C1000000/, (2013.6.23アクセス)
２）張興和「スクラップ及び酸化鉄屑の有効利用に関する移動層型溶銑製造プロセスの基礎的研究」(博士学位論文)p89、(1997.3)
３）野村インデックスファンド「定期積立とドルコスト平均法」(2011.3.4掲載)
http://indexfund.nomura-am.co.jp/viewpoint/unometakanome/05.html (2013.7.14.アクセス)
４）スルガ銀行「コツコツ積立（ドルコスト平均法)」
http://www.surugabank.co.jp/surugabank/kojin/service/fuyasu/tousin/advice/dollarcost/index.html (2013.7.14.アクセス)
５）「正確に統計平均値を計算する」http://wenku.baidu.com/view/29f38868561252d380eb6e19.html (2013年7月14日アクセス)
６）ET ロボコン2013、http://www.etrobo.jp/2013/about/about.php, (2013.7.14アクセス)
７）ET ロボコン実行委員会「ETロボコン2012 総合得点の算出方式」(2012.8)
http://www.etrobo.jp/2012/gaiyou/images/doc/ETRC2012sogo.pdf、(2013.7.14アクセス)
８）情報検索システムの評価法、http://www. www.r.dl.itc.u-tokyo.ac.jp/~nakagawa/infoDB/ir-esti.ppt、(2013.7.14アクセス)

旭川大学経済学部紀要　第73号（2014年３月）

要旨

# 平均の意味と正確な計算方法に関する浅見
## ― 調和平均の例解を中心に ―

張　　　興　和

大学新入生に平均の概念を十分に理解できない人が多数いる事実に鑑みて、調和平均を通じて平均の意味と正確な計算方法を論じた。

最も身近な往復平均速度の例を用いて調和平均、加重調和平均を導出し、その上、調和平均と加重算術平均の一致性を確認した。

「人口密度」の調和平均がその逆数の「一人当たり面積」の算術平均と一致すると同様に、ある指標の調和平均はその指標の逆数の算術平均と一致する関係を示した。

調和平均には、自動車の平均燃費のような、理論的に必ず取らなければならない調和平均と、競技や性能の総合評価のような、要素間のバランス重視のために自主的に取る調和平均がある。

Abstract

# Discussion on Meaning and Calculation Method of the Mean
## Through the Illustration of the Harmonic Mean

Xinghe Zhang

In this paper, meaning and calculation method of the mean were discussed through harmonic mean, because there were many freshmen who could not completely understand the concept of mean.

Harmonic mean and weighted harmonic mean were derived, and it was confirmed that harmonic mean is equal to weighted arithmetic mean, by using the most familiar example of mean speed of a round trip.

Harmonic mean of given numbers is equal to arithmetic mean of the reciprocal of the given numbers, the example is that the harmonic mean of “the population density” is equal to the arithmetic mean of “the acreage per person” which is the reciprocal number of the population density.

Two kinds of analyses often used harmonic mean, one is that the analyses target must take the harmonic mean theoretically, such as the mean mileage of the cars. The other one is that the analyses emphasized the balance between the elements, such as the general evaluation of the contest or performance.

Key words: harmonic mean; arithmetic mean; mean speed; mean mileage; mean particle diameter; mean populution density; mean purchase unit price